**ГОСУДАРСТВЕННОЕ НАУЧНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ
НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ»**

УДК 519.17

КАРТЫННИК
Юрий Анатольевич

СТРУКТУРНЫЕ И АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КЛАССОВ ГРАФОВ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ В ТЕРМИНАХ ОКРЕСТНОСТНЫХ МНОЖЕСТВ ВЕРШИН

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

по специальности 01.01.09 — дискретная математика
и математическая кибернетика

Минск, 2019

Работа выполнена в Белорусском государственном университете.

Научный руководитель: **Орлович Юрий Леонидович**, кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой биомедицинской информатики Белорусского государственного университета.

Официальные оппоненты: **Демиденко Виталий Михайлович**, доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики Белорусского государственного экономического университета;

Бенедиктович Владимир Иванович, кандидат физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник Государственного научного учреждения «Институт математики Национальной академии наук Беларуси».

Оппонирующая организация: **Государственное научное учреждение «Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси»**

Защита состоится «27» июня 2019 г. в 15:00 на заседании совета по защите диссертаций Д 01.02.02 при Государственном научном учреждении «Институт математики Национальной академии наук Беларуси» по адресу: 220072, Республика Беларусь, г. Минск, ул. Сурганова, 11. Тел. учёного секретаря: (+375-17) 284–17–62. E-mail: vbened@im.bas-net.by.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Государственного научного учреждения «Институт математики Национальной академии наук Беларуси» .

Автореферат разослан «...» мая 2019 г.

Учёный секретарь совета
по защите диссертаций, кандидат
физико-математических наук, доцент В.И. Бенедиктович

ВВЕДЕНИЕ

Структурные свойства графов, формулируемые в терминах окрестностей множеств вершин, и теоретико-сложностные характеристики задач, связанных с соответствующими числовыми графовыми инвариантами, интенсивно исследуются на протяжении многих лет, начиная с середины 70-х годов прошлого столетия. К указанным инвариантам относятся параметры, так или иначе связанные с понятием доминирования — важнейшие числа доминирования, ирридантности, независимого доминирования, связного доминирования и другие. Интерес к ним вызван прежде всего прикладными аспектами использования этих параметров — например, в задачах покрытия и упаковки, оптимизации расписаний, проектирования сетей телекоммуникации, помехоустойчивого кодирования.

В диссертационной работе центральную роль играет понятие окрестностного множества вершин графа как доминирующего множества его вершин со специальным свойством. Наложение дополнительных ограничений на окрестностное множество приводит к понятиям независимого окрестностного, совершенного окрестностного и связного окрестностного множеств вершин. В рамках диссертационного исследования ставится цель установить вычислительную сложность и сложность аппроксимации алгоритмических задач о теоретико-графовых инвариантах, выражаемых в терминах таких множеств.

Для достижения этой цели, в частности, вводится ряд новых классов графов, в которых каждое множество вершин с некоторым широко известным свойством (доминирования, ирридантности, независимости, связного доминирования) является окрестностным (или, как в случае 1-треугольных графов, — совершенным окрестностным) множеством. Для каждого из этих классов графов устанавливаются структурные характеризации, из которых следует существование полиномиальных алгоритмов распознавания таких графов.

С одной стороны, введённые классы графов оправдывают себя как модель для изучения вычислительной сложности соответствующих оптимизационных задач. Для задач нахождения наименьших по мощности окрестностных и связных окрестностных множеств вершин впервые получены результаты о сложности аппроксимации, а для задачи о совершенных окрестностных множествах — результат о вычислительной сложности. Во всех трёх случаях использована взаимосвязь между изучаемыми задачами о разновидностях окрестностных множеств и задачами о более известных типах множеств вершин, заложенных в определениях этих классов графов, поэтому каждый из таких результатов можно рассматривать в том числе с позиции изучения соответствующих классических инвариантов.

С другой стороны, изучение структурных свойств указанных классов графов представляет независимый интерес и приводит к органичному дополнению результатов исследований иерархии классов графов, связанных с широко изучаемым в настоящее время классом треугольных графов. Мы дополняем указанную иерархию рядом результатов о равенстве, включениях и пересечениях изучаемых классов графов, в том числе несколькими новыми характеризациями известных классов.

Наконец, подход, использованный в доказательствах сложности аппроксимации некоторых из рассматриваемых задач, оказывается полезным в контексте задачи о взвешенных независимых доминирующих множествах в хордальных графах, что позволяет усилить соответствующий известный результат.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Связь работы с крупными научными программами (проектами) и темами. Тема диссертации соответствует направлениям научных исследований «Физические и математические методы и их применение для решения актуальных проблем естествознания, техники, новых технологий, экономики и социальных наук» и «Междисциплинарные исследования», определённым Перечнями приоритетных направлений научных исследований Республики Беларусь на 2011–2015 и 2016–2020 годы (постановления Совета Министров Республики Беларусь от 19 апреля 2010 г. № 585 и от 12 марта 2015 г. № 190).

Диссертационная работа выполнялась на кафедре дискретной математики и алгоритмики факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета в соответствии со следующими заданиями государственных программ научных исследований (ГПНИ):

— заданием № 1.6.01.1 «Методы и алгоритмы дискретной математики для решения задач оптимизации, характеризации и распознавания» ГПНИ «Конвергенция», подпрограмма «Математические методы» (2011–2015 гг., номер гос. регистрации: 20114354);
— заданием № 1.6.01.1 «Комбинаторные модели, методы и алгоритмы для решения задач, возникающих в сложных дискретных системах» ГПНИ «Конвергенция — 2020», подпрограмма «Методы математического моделирования сложных систем» (2016–2020 гг., номер гос. регистрации: 20162640),

а также в соответствии с заданием НИР «Разработка моделей и эффективных алгоритмов для решения прикладных оптимизационных задач на дискретных структурах» (номер гос. регистрации 20151325) по договору № Ф15МЛД-022 от 1 июля 2015 г. с Белорусским республиканским фондом фундаментальных исследований.

Цель и задачи исследования. Целью диссертационного исследования является разработка новых методов систематического анализа структурных и числовых характеристик объектов, изучаемых в рамках теории доминирования в графах, с акцентом на применении этих методов к установлению вычислительной сложности и сложности аппроксимации графовых инвариантов, связанных с окрестностями множеств вершин, а также к детализации иерархии подклассов класса треугольных графов и родственных ему классов графов.

Цель диссертации реализуется путём решения задач характеризации, а также анализа вычислительной сложности задач распознавания и оптимизации для ряда классов графов, определяемых в терминах взаимосвязи между окрестностными множествами вершин и другими классическими понятиями теории доминирования, в том числе путём сведения известных NP-трудных задач к задачам о соответствующих графовых инвариантах в рассматриваемых классах графов.

Объектами исследования являются специальные классы графов и графовые инварианты, определяемые в терминах окрестностей множеств вершин. К *предмету исследования* относятся структурные и алгоритмические свойства указанных объектов.

Научная новизна. Введены и охарактеризованы новые классы графов, строение которых определяется свойствами окрестностей множеств вершин, а также получены новые структурные характеризации для известных классов графов. Изучение взаимосвязей между этими классами графов является продолжением систематического исследования иерархии подклассов класса треугольных графов, CIS-графов и родственных им классов графов, активно продолжающегося в настоящее время.[1,2]

Разработаны новые методы исследования алгоритмических свойств числовых графовых инвариантов, возникающих в теории доминирования, на основе изучения свойств соответствующих задач распознавания и оптимизации в классах графов, где рассматриваемые инварианты связаны с другими классическими параметрами теории доминирования. С использованием этого подхода получены результаты о вычислительной сложности и сложности аппроксимации для ряда вариантов окрестностных чисел, отвечающие на открытые до настоящего времени вопросы об их алгоритмических свойствах и дополняющие соответствующие результаты о независимых окрестностных числах в классе треугольных графов.[3] Данные результаты могут также рассматриваться с позиции

[1] Cheston, G. A. A survey of the algorithmic properties of simplicial, upper bound and middle graphs / G. A. Cheston, T. S. Jap // J. Graph Algorithms Appl. — 2006. — Vol. 10. — P. 159–190.

[2] Boros, E. On equistable, split, CIS, and related classes of graphs / E. Boros, V. Gurvich, M. Milanič // Discrete Appl. Math. — 2017. — Vol. 216. — P. 47–66. — Special Graph Classes and Algorithms – in Honor of Professor Andreas Brandstädt on the Occasion of His 65th Birthday.

[3] Orlovich, Y. Independent domination in triangle graphs / Y. Orlovich, I. Zverovich // Electron. Notes Discrete Math.

изучения задач о классических параметрах теории доминирования в ограничении на изучаемые классы графов.

Использованная в процессе вышеуказанных исследований методология успешно применена к задаче установления сложности аппроксимации взвешенных параметров k-дистанционного независимого доминирования (в вершинном и рёберном вариантах) в классе хордальных графов, что усиливает известный результат Дж. Дж. Чанга.[4]

Положения, выносимые на защиту.

В следующих положениях при формулировке результатов о сложности аппроксимации оптимизационных задач символ $|G|$ обозначает порядок графа из условия задачи.

1. Охарактеризованы классы доминантно-треугольных, ирридантно-треугольных, совершенно-доминантно-треугольных, 1-треугольных, связно-доминантно-треугольных и совершенно-связно-окрестностных графов, определяемые в терминах взаимосвязи между окрестностными множествами вершин и другими классическими понятиями теории доминирования. Из полученных характеризаций следует существование полиномиальных алгоритмов распознавания принадлежности графа соответствующим классам. Установлен ряд результатов о равенстве, вложении и пересечении введённых и некоторых известных классов графов.

2. Доказана NP-трудность задачи построения $(c \ln |G|)$-приближённого решения каждой из оптимизационных задач ЧИСЛО ДОМИНИРОВАНИЯ, ЧИСЛО СВЯЗНОГО ДОМИНИРОВАНИЯ, ОКРЕСТНОСТНОЕ ЧИСЛО, СВЯЗНОЕ ОКРЕСТНОСТНОЕ ЧИСЛО, ЧИСЛО ИРРИДАНТНОСТИ в классе симплициально-расщепляемых графов, где $c > 0$ — некоторая фиксированная рациональная константа. Тем самым, в предположении $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ для последних трёх задач впервые получен отрицательный ответ на вопрос о существовании приближённых полиномиальных алгоритмов с константными оценками точности.

3. Показано, что задачи ДОМИНИРУЮЩЕЕ МНОЖЕСТВО, ОКРЕСТНОСТНОЕ МНОЖЕСТВО, ИРРИДАНТНОЕ МНОЖЕСТВО, НЕЗАВИСИМОЕ ДОМИНИРУЮЩЕЕ МНОЖЕСТВО, НЕЗАВИСИМОЕ ОКРЕСТНОСТНОЕ МНОЖЕСТВО и СОВЕРШЕННОЕ ОКРЕСТНОСТНОЕ МНОЖЕСТВО в классе $\{K_{1,4}, K_4 - e\}$-свободных рёберно-симплициальных графов со степенями вершин не более 6 являются NP-полными.

4. Установлена NP-трудность в сильном смысле задачи построения

— 2007. — Vol. 28. — P. 341–348. — 6th Czech-Slovak International Symposium on Combinatorics, Graph Theory, Algorithms and Applications.

[4] Chang, G. J. The weighted independent domination problem is NP-complete for chordal graphs / G. J. Chang // Discrete Appl. Math. — 2004. — Vol. 143, № 1. — P. 351–352.

$(c \ln |G|)$-приближённого решения для оптимизационных задач ВЗВЕШЕННОЕ ЧИСЛО $(2\ell-1)$-НЕЗАВИСИМОГО ДОМИНИРОВАНИЯ и ВЗВЕШЕННОЕ ЧИСЛО НАИМЕНЬШЕГО МАКСИМАЛЬНОГО 2ℓ-ДИСТАНЦИОННОГО ПАРОСОЧЕТАНИЯ при любом целом $\ell \geqslant 1$ в классе хордальных графов, где $c > 0$ — некоторая фиксированная рациональная константа.

Личный вклад соискателя. Диссертационная работа отражает личный вклад автора в проведенные исследования. Научным руководителем, кандидатом физико-математических наук, доцентом Ю. Л. Орловичем, была определена область исследований, осуществлялось общее руководство, оказывалась методологическая помощь, проводилось обсуждение полученных результатов. В работе [5] П. А. Иржавский является автором подхода к доказательству одной из теорем (в диссертационной работе она представлена под номером 2.3.14), что непосредственно указано при её изложении в главе 2. Из совместных публикаций в данную диссертационную работу вошли результаты, принадлежащие её автору.

Апробация диссертации и информация об использовании её результатов. Результаты, вошедшие в диссертационную работу, докладывались и обсуждались на следующих научных конференциях:

1. 69-й научной конференции студентов и аспирантов БГУ (Минск, 14–17 мая 2012 года);
2. 71-й научной конференции студентов и аспирантов БГУ (Минск, 18–21 мая 2014 года);
3. 72-й научной конференции студентов и аспирантов БГУ (Минск, 11–22 мая 2015 года);
4. Международной научной конференции «27th European Conference on Operational Research (EURO 2015)» (Глазго, Великобритания, 12–15 июля 2015 года);
5. Международной научной конференции «Дискретная математика, алгебра и их приложения (DIMA-2015)», посвящённой 100-летию со дня рождения академика Д. А. Супруненко (Минск, 14–18 сентября 2015 года);
6. Международной конференции «1st IMA Conference on Theoretical and Computational Discrete Mathematics» (Дерби, Великобритания, 22–23 марта 2016 года);
7. XII Белорусской математической конференции (БМК-2016) (Минск, 5–10 сентября 2016 года);
8. Международном конгрессе по информатике: информационные системы и технологии (CSIST'2016) (Минск, 24–27 октября 2016 года),

а также дважды на заседаниях семинара по теории графов и комбинаторному анализу в Белорусском государственном университете (руководитель семинара — доктор физико-математических наук, профессор Р. И. Тышкевич).

Результаты диссертации внедрены в учебный процесс и использованы для выполнения международного проекта на кафедре дискретной математики и алгоритмики Белорусского государственного университета (имеется один акт о внедрении).

Опубликованность результатов диссертации. Список основных работ по теме диссертации включает 16 наименований: 6 публикаций, соответствующих пункту 18 Положения о присуждении учёных степеней и присвоении учёных званий в Республике Беларусь (общим объёмом 5 авторских листов), 4 статьи в сборниках материалов научных конференций, 6 тезисов докладов. Общий объём публикаций по теме диссертации составляет примерно 5.5 авторских листов.

Структура и объём диссертации. Диссертация включает в себя оглавление, перечень условных обозначений, введение, общую характеристику работы, три главы, содержащие результаты оригинальных исследований, заключение, библиографический список и два приложения.

Первая глава является основой для дальнейшего изложения и содержит используемые в работе теоретико-графовые понятия и обозначения, описание изучаемых математических объектов и взаимосвязей между ними, а также постановку связанных с ними алгоритмических задач. В ней также содержится обзор литературы по соответствующим вопросам.

Вторая глава посвящена исследованию структурных свойств классов графов, определяемых в терминах окрестностных множеств вершин, в частности, их структурным характеризациям. В ней также устанавливаются результаты о равенстве, вложении и пересечении как введённых в работе, так и ряда известных классов графов.

В **третьей главе** устанавливаются теоретико-сложностные результаты, касающиеся задач распознавания принадлежности графа к введённым в работе классам графов, а также оптимизационных задач о специальных независимых и доминирующих множествах вершин в этих классах графов.

Полный объём диссертации составляет 109 страниц. Диссертация содержит 14 рисунков и 1 таблицу, занимающих в совокупности 3 страницы. Библиографический список содержит 95 наименований, включая публикации автора диссертации, и занимает 8 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Во **введении** обосновывается актуальность выбранной темы диссертационного исследования, её связь с другими исследованиями в области теории доминирования, приводится обзор соответствующей литературы. Характеризуется объект исследований и обосновывается значимость полученных результатов. Приводится краткое изложение структуры дальнейшего содержания работы.

В **первой главе** вводятся используемые в работе теоретико-графовые понятия и обозначения, перечисляются и обосновываются некоторые соотношения между изучаемыми графовыми инвариантами, производится постановка соответствующих задач распознавания и оптимизации. Также в данной главе приводится обзор известных результатов для класса треугольных графов, послуживших мотивацией для диссертационного исследования.

Раздел 1.1 содержит определения общих понятий теории графов, используемых в ходе дальнейшего изложения, и соответствующие им обозначения. Остановимся лишь на тех из них, которые не являются широко распространёнными и понадобятся в определениях и утверждениях ниже.

Замкнутое собственное окружение $PN_G[e]$ ребра $e = uv$ в графе G определяется как пересечение замкнутых окружений концевых вершин u и v этого ребра. Другими словами, множество $PN_G[uv] = N_G[u] \cap N_G[v]$ состоит из вершин u и v и всех вершин графа G, которые одновременно смежны с u и v. *Замкнутое окружение* $N_G[X]$ подмножества X вершин графа G определяется как объединение замкнутых окружений всех входящих в X вершин. В предыдущих обозначениях индекс G может опускаться, если соответствующий граф однозначно определяется из контекста.

Термины «максимальное» и «минимальное» применительно к множествам с каким-либо свойством всюду далее употребляются в смысле включения множеств, а термины «наибольшее» и «наименьшее» — в смысле мощностей этих множеств.

Симплициальной вершиной графа G называется вершина $v \in V(G)$, замкнутое окружение которой порождает клику этого графа — иными словами, все вершины графа G, смежные с v, попарно смежны между собой. Клика, образуемая замкнутым окружением симплициальной вершины, называется *симплициальной кликой*. Как нетрудно убедиться, любая симплициальная клика некоторого графа является максимальной кликой в этом графе, т. е. не содержится ни в какой другой его клике.

Через $K_4 - e$ будем обозначать граф, получаемый удалением произвольного ребра из полного графа K_4.

Раздел 1.2 систематизирует используемые в работе понятия теории доминирования и содержит список теоретико-графовых инвариантов, изучаемых в рамках диссертационной работы, вместе с их определениями и обозначениями. В частности, важную роль в диссертационном исследовании играет понятие *окрестностного множества* вершин графа G как специального доминирующего множества S его вершин со следующим свойством: каждое ребро e графа G либо содержит некоторую вершину множества S, либо в объединении с такой вершиной порождает треугольник в графе G (иными словами, $PN[e] \cap S \neq \varnothing$). Множество S вершин графа называется *независимым окрестностным*, если оно одновременно является окрестностным и независимым в классическом смысле (т. е. вершины множества S попарно несмежны). Независимое окрестностное множество S вершин графа G называется *совершенным окрестностным*, если каждое ребро $e \in E(G)$, не содержащее вершин этого множества, порождает треугольник в объединении лишь с одной вершиной из S (или, что то же самое, $|PN[e] \cap S| = 1$). Окрестностное множество вершин связного графа G называется *связным окрестностным*, если оно является окрестностным и порождает связный подграф графа G.

Также для изложения результатов раздела 3.4 потребуются следующие k-*дистанционные* обобщения понятий независимого, доминирующего и независимого доминирующего множеств и понятия паросочетания для произвольных целых значений $k \geqslant 1$. Множество $I \subseteq V(G)$ вершин графа G называется k-*независимым*, если расстояние между любыми двумя различными вершинами этого множества больше k. Множество $D \subseteq V(G)$ вершин графа G называется k-*доминирующим*, если для каждой вершины $v \in V(G)$ в множестве D найдётся вершина на расстоянии не более k от v. Множество $I \subseteq V(G)$ вершин графа G называется k-*независимым доминирующим*, если оно одновременно является k-независимым и k-доминирующим. Нетрудно убедиться, что k-независимые, k-доминирующие и k-независимые доминирующие множества графа G находятся в биективном отношении соответственно с независимыми, доминирующими и независимыми доминирующими множествами графа G^k — k-й степени графа G.

Множество $M \subseteq E(G)$ рёбер графа G, не имеющих общих вершин, называется *паросочетанием* или *независимым множеством рёбер*. Множество $M \subseteq E(G)$ рёбер графа G называется k-*дистанционным паросочетанием*, если каждое из попарных расстояний между различными рёбрами из M не меньше k, где k — положительное целое число. Таким образом, понятие 1-дистанционного паросочетания соответствует классическому понятию паросочетания, а 2-дистанционные паросочетания принято называть *индуцированными паросочетаниями*. Как опять же нетрудно убедиться, k-дистанционные паросочетания графа G являются k-независимыми множествами в рёберном графе $L(G)$ графа G и, соответственно, независимыми множествами в графе $(L(G))^k$, и наоборот.

В **разделе 1.3** приводится ряд известных соотношений между параметрами раздела 1.2, вытекающих из взаимосвязи между соответствующими множествами вершин. В **разделе 1.4** описывается общая схема для формулировок и названий задач распознавания и оптимизации, отвечающих графовым инвариантам из раздела 1.2 (полный перечень рассматриваемых задач вынесен в приложение А). В **разделе 1.5** вводятся классы графов разбиений и обобщённых графов разбиений, треугольных и CIS-графов, и приводится обзор некоторых известных результатов, касающихся данных классов графов и представляющих интерес в рамках диссертационной работы. Граф называется *треугольным*, если каждое его максимальное независимое множество является окрестностным (и, таким образом, независимым окрестностным). Граф называется *CIS-графом* (от англ. «Clique / Independent Set» — «клика / независимое множество»), если каждая его максимальная клика имеет непустое пересечение с каждым его максимальным независимым множеством. Известно, что каждый CIS-граф является треугольным графом.

Во **второй главе** вводится обширный ряд новых классов графов, мотивированных исследованием различных вариаций понятия окрестностного множества и соответствующих инвариантов графа, и изучаются их структурные свойства — в основном посредством структурных характеризаций и установления отношений между этими классами (равенство, вложение, устройство пересечения). Иллюстрирующая эти результаты схема иерархии классов графов приводится в приложении Б. Кроме того, ряд результатов этой главы, выражающихся в соотношениях между теоретико-графовыми инвариантами, мотивируется исследованиями характеристик соответствующих алгоритмических задач в главе 3.

В **разделе 2.1** вводится понятие симплициально-расщепляемого графа (на основании известного понятия расщепляемого графа) как графа, множество вершин которого можно разбить на симплициальную клику и независимое множество, и приводится доказательство равенства между числами доминирования и связного доминирования в связных расщепляемых графах (теорема 2.1.4). В доказательстве используется лемма 2.1.3 о структуре доминирующих множеств в графах специального вида, которая также используется в разделе 3.2 применительно к средним графам от гиперграфов.

В **разделе 2.2** вводятся классы доминантно-треугольных и иррידантно-треугольных графов, определяемые в терминах соотношений между доминирующими или максимальными ирридантными множествами вершин графа и его окрестностными множествами вершин. Как следует из приводимой структурной характеризации этих классов графов, оба они совпадают с известным классом рёберно-симплициальных графов, характеризующихся тем, что каждое ребро такого графа содержится в некоторой симплициальной клике. Само это совпадение и дальнейшие структурные характеризации доминантно-треугольных графов, приводимые в этой главе, таким образом, являются новыми характеризациями класса рёберно-симплициальных графов. Этот класс графов обладает и рядом других известных характеризаций: в частности, класс рёберно-симплициальных графов характеризуется как класс графов верхних границ из теории частично упорядоченных множеств, а также как класс средних графов от гиперграфов (о чём более подробно говорится в подразделе 2.2.3).

В **подразделе 2.2.1** вводится класс *доминантно-треугольных* графов как графов, в которых каждое минимальное доминирующее множество является окрестностным. Центральным результатом этого подраздела является следующий критерий доминантной треугольности графа.

Теорема 2.2.3. *Для графа G следующие утверждения эквивалентны:*

1) G — доминантно-треугольный граф;

2) каждое ребро графа G обладает собственной вершиной;

3) G — рёберно-симплициальный граф.

В утверждении теоремы вершина w графа G называется *собственной для ребра* $uv \in E(G)$, если каждая вершина из $N[w]$ одновременно смежна с вершинами u и v (т. е. $N[w] \subseteq PN[uv]$).

Возможность покрытия доминантно-треугольного графа симплициальными кликами влечёт (известное для рёберно-симплициальных графов) вложение класса доминантно-треугольных графов в класс обобщённых графов разбиений.

Подраздел 2.2.2 посвящён характеризации класса ирридантно-треугольных графов. Множество X вершин графа G называется *избыточным*, если удаление некоторой вершины из этого множества не изменяет его замкнутого окружения $N[X]$. Множество вершин, не являющееся избыточным, называется *ирридантным*. Класс *ирридантно-треугольных* графов определяется как класс графов, в которых каждое максимальное ирридантное множество является окрестностным. Вложение класса ирридантно-треугольных графов в класс доминантно-треугольных графов тривиально следует из того, что каждое минимальное доминирующее множество графа является максимальным ирридантным.[5] Однако следующая теорема показывает, что это вложение нестрогое и данные классы графов совпадают между собой.

Теорема 2.2.8. *В произвольном доминантно-треугольном графе каждое максимальное ирридантное множество является минимальным доминирующим.*

[5] Bollobás, B. Graph-theoretic parameters concerning domination, independence, and irredundance / B. Bollobás, E. J. Cockayne // J. Graph Theory. — 1979. — Vol. 3, № 3. — P. 241–249.

Следствие 2.2.9. *Класс иррeдантно-треугольных графов совпадает с классом доминантно-треугольных графов (графов верхних границ, рёберно-симплициальных графов).*

Приведённое далее в работе следствие 2.2.10 подчёркивает вытекающее из следствия 2.2.9 совпадение в классе доминантно-треугольных графов классических параметров ирридантности и доминирования.

В **подразделе 2.2.3** перечисляются некоторые другие известные свойства класса рёберно-симплициальных графов, которые в свете установленной нами характеризации являются и свойствами доминантно-треугольных графов.

В **подразделе 2.2.4** для класса доминантно-треугольных графов приводится характеризация в терминах «доминантно-плохих» подграфов, мотивированная наличием известной схожей характеризации для класса треугольных графов.

Порождённую простую цепь $P_4 = (a, b, c, d)$ графа G назовём *«доминантно-плохой»* P_4, если в графе G существует такое доминирующее множество D, что вершины a и d принадлежат D, а вершины b и c не принадлежат D и не смежны одновременно ни с одной вершиной из D. Аналогично, порождённый подграф C_4 графа G назовём *«доминантно-плохим»* C_4, если в графе G существует такое доминирующее множество D, что некоторые две соседние вершины данного цикла C_4 принадлежат D, а две другие его вершины не принадлежат D и не смежны одновременно ни с одной вершиной из D.

Теорема 2.2.12. *Граф является доминантно-треугольным тогда и только тогда, когда он не содержит «доминантно-плохих» порождённых подграфов P_4 или C_4.*

Приводится пример графа, который содержит «доминантно-плохие» порождённые простые цепи P_4, но не содержит «плохих» порождённых простых цепей P_4 в терминах одной из известных характеризаций треугольных графов.[6]

В **подразделе 2.2.5** устанавливается родственная характеризация класса доминантно-треугольных графов в терминах «симплициально-плохих» подграфов.

Будем называть порождённый подграф H графа G, изоморфный простой цепи P_k или простому циклу C_k для $k \geqslant 4$, *«симплициально-плохим»*, если для некоторого из неконцевых рёбер e графа H в его замкнутом собственном окружении $PN_G[e]$ не содержится симплициальных вершин графа G.

Наблюдение 2.2.13. *Каждый «доминантно-плохой» порождённый подграф P_4 или C_4 произвольного графа является «симплициально-плохим».*

Приведён пример, иллюстрирующий, что обратное утверждение в общем случае неверно. Из наблюдения 2.2.13 вытекает следующая характеризация

[6] Miklavič, Š. Equistable graphs, general partition graphs, triangle graphs, and graph products / Š. Miklavič, M. Milanič // Discrete Appl. Math. — 2011. — Vol. 159, № 11. — P. 1148–1159.

рёберно-симплициальных графов в терминах «симплициально-плохих» подграфов.

Теорема 2.2.14. *Для графа G следующие утверждения эквивалентны:*

1) *G — рёберно-симплициальный граф;*
2) *G не содержит «симплициально-плохих» порождённых подграфов P_k или C_k, $k \geqslant 4$;*
3) *G не содержит «симплициально-плохих» порождённых подграфов P_4 или C_4.*

Для произвольного графа H обозначим через $Tri(H)$ граф, который получается из графа H добавлением для каждого ребра $uv \in E(H)$ новой вершины x_{uv} и пары рёбер ux_{uv} и vx_{uv} (т. е. «достраиванием» этого ребра до треугольника). Как легко видеть, граф $Tri(H)$ является доминантно-треугольным и содержит H в качестве порождённого подграфа. То же верно и в отношении графа $Tri'(H)$, получаемого из графа H «достраиванием» до треугольников лишь всех неконцевых рёбер.

Нижеприведённое следствие из предыдущей характеризации оказывается полезным при исследовании пересечений класса доминантно-треугольных графов с классами расщепляемых графов и кографов в подразделе 2.2.7.

Обозначим через $H \lessdot G$ утверждение «граф G содержит порождённый подграф, изоморфный H».

Следствие 2.2.15. *Пусть G — рёберно-симплициальный граф. Тогда для любого целого числа $k \geqslant 4$ выполнено:*

1) *если $C_k \lessdot G$, то $Tri(C_k) \lessdot G$;*
2) *если $P_k \lessdot G$, то $Tri'(P_k) \lessdot G$.*

В **подразделе 2.2.6** вводится понятие окрестностной наследственности, обобщающее свойство конаследственности класса треугольных графов,[7] и показывается, что класс доминантно-треугольных графов обладает этим свойством. Класс графов называется *окрестностно-наследственным*, если он замкнут относительно операции удаления замкнутого окружения произвольного множества вершин графа (кроме множества всех его вершин). Устанавливается связь между свойствами конаследственности и окрестностной наследственности, возможность характеризации окрестностно-наследственного класса графов в терминах ко-окрестностных подграфов (подграфов, получаемых в результате обозначенной выше операции удаления) и неограниченность числа графов в любой такой характеризации для класса доминантно-треугольных графов.

Подраздел 2.2.7 посвящён установлению ряда соотношений между классом доминантно-треугольных графов и другими известными классами. Приво-

[7] Зверович, И. Э. Характеризация хорошо укрытых графов в терминах запрещенных костабильных подграфов / И. Э. Зверович // Матем. заметки. — 2000. — Т. 67, № 1. — С. 52–56.

дится альтернативное доказательство того, что пересечение классов расщепляемых и рёберно-симплициальных графов составляет класс $2K_2$-свободных доминантно-треугольных графов. Показывается, что этому пересечению, в частности, принадлежат все симплициально-расщепляемые графы, что играет важную роль в разделе 3.2, в котором устанавливается вычислительная сложность ряда задач во всех надклассах класса симплициально-расщепляемых графов.

Следующая теорема одновременно даёт представление о пересечении класса рёберно-симплициальных графов и широко известного класса P_4-свободных графов (известных как *кографы*) и включает в себя характеризацию известного класса *тривиально совершенных графов* ($\{P_4, C_4\}$-свободных графов). Класс тривиально совершенных графов изначально вводится как класс *совершенно-доминантно-треугольных графов* — графов, каждый порождённый подграф которых является доминантно-треугольным.

Теорема 2.2.19. *Для графа G следующие утверждения эквивалентны:*

1) граф G является доминантно-треугольным кографом;

2) граф G не содержит порождённых подграфов вида P_4 или C_4;

3) G — совершенно-доминантно-треугольный граф.

Обсуждаются другие известные свойства тривиально совершенных графов.

Подраздел 2.2.7 завершается отсылкой к результатам подраздела 2.3.1, в котором, в частности, устанавливается структурная характеризация $(K_4 - e)$-свободных доминантно-треугольных графов, что можно рассматривать как результат о пересечении класса доминантно-треугольных графов с классом $(K_4 - e)$-свободных графов.

Раздел 2.3 посвящён введению и характеризации класса 1-треугольных графов, мотивированного изучением теоретико-сложностных характеристик задач о совершенных окрестностных множествах, а также дальнейшему исследованию его структурных свойств.

Граф G называется 1-*треугольным*, если для каждого максимального независимого множества I графа G и каждого ребра $uv \in E(G - I)$ найдётся единственная вершина $w \in I$, одновременно смежная с вершинами u и v (т. е. множество вершин $\{u, v, w\}$ порождает треугольник в графе G). Иными словами, как нетрудно видеть, граф является 1-треугольным, если и только если каждое его максимальное независимое множество является совершенным окрестностным. Каждый 1-треугольный граф, очевидно, является треугольным.

Требование единственности вершины w в определении 1-треугольного графа приводит к следующему существенному ограничению на его структуру.

Утверждение 2.3.1. *Всякий 1-треугольный граф является $(K_4 - e)$-свободным.*

Ввиду этого **подраздел 2.3.1** содержит ряд утверждений о свойствах $(K_4 - e)$-свободных графов, касающихся в основном устройства их максимальных клик (некоторые из этих результатов, по-видимому, являются общеизвестными, но для полноты изложения они приводятся с доказательствами). Кроме того, устанавливается следующая новая характеризация $(K_4 - e)$-свободных графов в терминах замкнутых собственных окружений их рёбер.

Теорема 2.3.6. *Граф G является $(K_4 - e)$-свободным тогда и только тогда, когда для каждого ребра $e \in E(G)$ его замкнутое собственное окружение $PN[e]$ является максимальной кликой.*

В частности, из неё следует упомянутая в подразделе 2.2.7 характеризация $(K_4 - e)$-свободных доминантно-треугольных графов, которые, как будет показано ниже, составляют существенную часть класса 1-треугольных графов.

Следствие 2.3.7. *Граф G является $(K_4 - e)$-свободным рёберно-симплициальным тогда и только тогда, когда для каждого ребра $e \in E(G)$ его замкнутое собственное окружение $PN[e]$ является симплициальной кликой.*

Подраздел 2.3.2 устанавливает место класса 1-треугольных графов в иерархии подклассов класса CIS-графов. А именно, имеет место следующая теорема.

Теорема 2.3.8. *Для графа G следующие утверждения эквивалентны:*

1) *G — 1-треугольный граф;*
2) *G — $(K_4 - e)$-свободный треугольный граф;*
3) *G — $(K_4 - e)$-свободный CIS-граф.*

Таким образом, класс 1-треугольных графов является пересечением класса треугольных графов (или, альтернативно, его подкласса — класса CIS-графов) с классом $(K_4 - e)$-свободных графов.

В **подразделе 2.3.3** показывается, что классу 1-треугольных графов тривиально принадлежат все полные двудольные графы, все графы вида $K_m \times K_m$, $m \geqslant 1$ (декартовы произведения двух полных графов равных порядков), а также, ввиду следствия 2.3.7 — все $(K_4 - e)$-свободные доминантно-треугольные графы.

Подраздел 2.3.4 содержит полную структурную характеризацию класса 1-треугольных графов, согласно которой он исчерпывается тремя вышеперечисленными подклассами.

Теорема 2.3.14 (характеризация 1-треугольных графов). *Для связного графа G следующие утверждения эквивалентны:*

1) *G — 1-треугольный граф.*
2) *Выполняется по крайней мере одно из следующих условий:*
   (а) *G — полный двудольный граф;*
   (б) *G — декартово произведение $K_m \times K_m$ двух полных графов равных порядков для некоторого натурального числа m;*

(в) *G — $(K_4 - e)$-свободный рёберно-симплициальный граф.*

В **разделе 2.4** вводятся и исследуются классы тотально-симплициальных и тотально-рёберно-симплициальных графов.

Как уже упоминалось, в любом графе каждая симплициальная клика очевидно является максимальной. Граф называется *тотально-симплициальным*, если для него верно и обратное: каждая максимальная клика является симплициальной. Обсуждается, почему данный класс графов представляет интерес с точки зрения теории вычислительной сложности (как класс графов, в которых тривиальны задачи нахождения наибольшей по мощности клики и наибольшего по мощности независимого множества, в общем случае являющихся NP-трудными). Устанавливается принадлежность каждого тотально-симплициального графа к классу CIS-графов.

Граф G называется *тотально-рёберно-симплициальным*, если подграф $G(PN[e])$, порождённый замкнутым собственным окружением $PN[e]$ каждого ребра $e \in E(G)$, можно представить в виде объединения подграфов, порождённых симплициальными кликами графа G, т. е. $G(PN[e]) = \bigcup_{Q \in \mathcal{SQ}_e} G(Q)$, где $\mathcal{SQ}_e$ — некоторый набор симплициальных клик графа G.

Дальнейшие результаты подраздела приводят к установлению следующей цепочки строгих включений между классами графов:

$$
\begin{aligned}
&(K_4 - e)\text{-свободные рёберно-симплициальные графы} \subsetneq \\
&\subsetneq \text{тотально-симплициальные графы} \subsetneq \\
&\subsetneq \text{тотально-рёберно-симплициальные графы} \subsetneq \\
&\subsetneq \text{рёберно-симплициальные графы.}
\end{aligned}
$$

Кроме того, доказывается включение класса симплициально-расщепляемых графов в класс тотально-симплициальных графов.

В **разделе 2.5** вводится и характеризуется класс связно-доминантно-треугольных графов, изучение которого мотивировано исследованием теоретико-сложностных аспектов задачи СВЯЗНОЕ ОКРЕСТНОСТНОЕ МНОЖЕСТВО. Связный граф G называется *связно-доминантно-треугольным* (для краткости — *СвДТ-графом*), если для каждого минимального связного доминирующего множества D этого графа и каждого ребра $uv \in E(G - D)$ найдётся вершина $w \in D$, одновременно смежная с вершинами u и v (т. е. множество вершин $\{u, v, w\}$ порождает треугольник в графе G). Другими словами, каждое минимальное связное доминирующее множество СвДТ-графа G является также его (связным) окрестностным множеством. Следующая теорема представляет собой структурную характеризацию этого класса графов.

Теорема 2.5.1. *Для связного графа G следующие утверждения эквивалентны:*

1) *G — СвДТ-граф;*
2) *для каждого ребра $e \in E(G)$ без собственных вершин граф $G - PN[e]$ несвязен.*

Показано, что класс связно-доминантно-треугольных графов содержит в себе класс связных доминантно-треугольных графов строго: пример серии СвДТ-графов, не являющихся доминантно-треугольными, — квадраты простых цепей P_n для $n \geqslant 6$.

Раздел 2.6 содержит характеризацию ещё одного нового класса графов — класса совершенно-связно-окрестностных графов, родственного введённому и охарактеризованному И. Э. Зверовичем классу совершенно-связно-доминантных графов.[8] Граф G называется *совершенно-связно-окрестностным*, если для каждого его связного порождённого подграфа H выполнено равенство $nb(H) = n_c(H)$, где $nb(H)$ — мощность наименьшего окрестностного множества графа H, а $n_c(H)$ — мощность его наименьшего связного окрестностного множества.

Теорема 2.6.2. *Граф G является совершенно-связно-окрестностным тогда и только тогда, когда G — $\{P_5, C_4, C_5\}$-свободный граф.*

Раздел 2.7 является в некотором смысле переходным к главе 3: установленные структурные свойства изучаемых классов графов переводятся на язык соотношений между теоретико-графовыми инвариантами в этих классах, представляющими предмет изучения задач распознавания и оптимизации из следующей главы. Во многих случаях совпадение целого ряда соответствующих числовых параметров следует из уже доказанных включений классов графов и из самих определений этих классов (где постулируется, что некоторая разновидность доминирующих множеств является одновременно и другой).

В **третьей главе** приводятся результаты, относящиеся к теории сложности вычислений. В этой главе структурные свойства из главы 2, в особенности отмеченные в разделе 2.7 совпадения теоретико-графовых инвариантов, используются для установления вычислительной сложности и сложности аппроксимации сразу целого ряда из этих параметров в изучаемых классах графов.

Отметим, что для всех установленных в этой главе результатов об NP-полноте и NP-трудности задач распознавания и оптимизации имеет место NP-полнота и NP-трудность в сильном смысле, соответственно (лишь взвешенные задачи раздела 3.4 имеют числовые параметры, и показывается, что в сведениях к таким задачам известных NP-трудных задач могут быть использованы значения весов, ограниченные полиномом относительно размера входа).

---

[8] Zverovich, I. E. Perfect connected-dominant graphs / I. E. Zverovich // Discuss. Math. Graph Theory. — 2003. — Vol. 23, № 1. — P. 159–162.

Раздел 3.1 посвящён обсуждению вычислительной сложности задач распознавания введённых в диссертациионной работе классов графов. Для всех из них, за исключением класса тотально-симплициальных графов, существование полиномиального алгоритма распознавания следует из соответствующей характеризации, полученной в главе 2. Для класса тотально-симплициальных графов полиномиальность задачи его распознавания доказывается независимо. При этом устанавливается полиномиальная эквивалентность последней задачи с задачей ДРУГАЯ КЛИКА, которая состоит в обнаружении в графе максимальной клики, не содержащейся в заранее заданном списке его максимальных клик (размер списка ограничен полиномом относительно размера графа).

Будем говорить, что задача $P_{f(n)}$ является *задачей построения $f(n)$-приближённого решения* (или *задачей $f(n)$-аппроксимации*) *задачи минимизации P*, если задача $P_{f(n)}$ заключается в нахождении такого допустимого решения X задачи P по произвольному её примеру T размера n, что значение $\Omega(X)$ параметра оптимизации задачи P на этом решении отличается от значения $\Omega(X^*)$, достигающегося на оптимальном решении X^* задачи P для примера T, не более чем в $f(n)$ раз: $\Omega(X)/\Omega(X^*) \leqslant f(n)$. В диссертационной работе для оптимизационных задач на графах характерным размером входа, выступающим в качестве аргумента функции $f(n)$, является порядок графа из условия задачи, обозначенный через $|G|$.

Раздел 3.2 содержит результаты о сложности построения приближённых решений задач о доминирующих множествах вершин, которые опираются на соответствующие результаты для классической задачи ПОКРЫТИЕ ПОДМНОЖЕСТВАМИ: по данным конечному универсальному множеству S и семейству $\mathcal{S} = \{S_i\}$ его непустых подмножеств, объединение которых есть S, найти наименьшее из таких подсемейств семейства $\mathcal{S}$, множества-элементы которых в объединении дают S. Приводится обоснование того, что известный полиномиальный «жадный» алгоритм построения приближённого решения этой задачи, каждый раз выбирающий подмножество $S_i \in \mathcal{S}$, включающее в себя наибольшее число ещё не покрытых элементов, обеспечивает построение $O(\ln n)$-приближённого решения задачи ЧИСЛО ДОМИНИРОВАНИЯ и $O\left(\ln(n+m)\right)$-приближённого решения задачи ОКРЕСТНОСТНОЕ ЧИСЛО по заданному (n,m)-графу G. Полиномиальное сведение задачи ПОКРЫТИЕ ПОДМНОЖЕСТВАМИ, сохраняющее свойство приближения, к любой из ряда эквивалентных в классе симплициально-расщепляемых графов задач, позволяет установить следующий результат.

Следствие 3.2.5. *Для каждой из оптимизационных задач* ЧИСЛО ДОМИНИРОВАНИЯ*,* ЧИСЛО СВЯЗНОГО ДОМИНИРОВАНИЯ*,* ОКРЕСТНОСТНОЕ ЧИСЛО*,* СВЯЗНОЕ ОКРЕСТНОСТНОЕ ЧИСЛО*,* ЧИСЛО ИРРИДАНТНОСТИ *соответствующая задача построения $(c\ln|G|)$-приближённого решения в классе связных* *симплициально-расщепляемых графов (и, таким образом, во всех его надклассах) является* NP*-трудной, где* $c > 0$ *— некоторая фиксированная рациональная константа.*

Отмечено, что для некоторых из соответствующих задач, ставящих целью нахождение наибольших (а не наименьших) по мощности множеств с предписанным свойством, — а именно ВЕРХНЕЕ ЧИСЛО ДОМИНИРОВАНИЯ, ВЕРХНЕЕ ЧИСЛО ИРРИДАНТНОСТИ и ВЕРХНЕЕ ОКРЕСТНОСТНОЕ ЧИСЛО, а также ЧИСЛО НЕЗАВИСИМОСТИ и эквивалентной ей в классе треугольных графов задачи ВЕРХНЕЕ НЕЗАВИСИМОЕ ОКРЕСТНОСТНОЕ ЧИСЛО, в классе доминантно-треугольных графов существует тривиальный полиномиальный алгоритм, основанный на выборе независимого доминирующего множества, состоящего из симплициальных вершин. В классе 1-треугольных графов к этому списку принадлежит и задача ВЕРХНЕЕ СОВЕРШЕННОЕ ОКРЕСТНОСТНОЕ ЧИСЛО.

Независимо доказывается NP-полнота следующих задач в классе 1-треугольных графов.

Теорема 3.2.9. *Задачи* ДОМИНИРУЮЩЕЕ МНОЖЕСТВО*,* ОКРЕСТНОСТНОЕ МНОЖЕСТВО *и* ИРРИДАНТНОЕ МНОЖЕСТВО *в классе* $(K_4 - e)$*-свободных рёберно-симплициальных графов являются* NP*-полными. Свойство* NP*-полноты сохраняется для перечисленных задач и в классе* $\{K_{1,4}, K_4 - e\}$*-свободных рёберно-симплициальных графов со степенями вершин не более* 6*.*

В **разделе 3.3** изучаются теоретико-сложностные свойства задач о независимых множествах вершин. Следующий результат, первоначально сформулированный для треугольных графов,[9] непосредственно переносится на класс доминантно-треугольных графов.

Теорема 3.3.2. *Задача построения* $|G|^{1-\varepsilon}$*-приближённого решения задачи* ЧИСЛО НЕЗАВИСИМОГО ДОМИНИРОВАНИЯ *в классе доминантно-треугольных графов (и эквивалентной ей в этом классе задачи* НЕЗАВИСИМОЕ ОКРЕСТНОСТНОЕ ЧИСЛО*) является* NP*-трудной при любом* $\varepsilon > 0$*.*

Далее устанавливается NP-полнота задачи СОВЕРШЕННОЕ ОКРЕСТНОСТНОЕ МНОЖЕСТВО, послужившей мотивацией для введения класса 1-треугольных графов, и эквивалентных ей в этом классе задач.

Теорема 3.3.5. *Задачи* НЕЗАВИСИМОЕ ДОМИНИРУЮЩЕЕ МНОЖЕСТВО*,* НЕЗАВИСИМОЕ ОКРЕСТНОСТНОЕ МНОЖЕСТВО *и* СОВЕРШЕННОЕ ОКРЕСТНОСТНОЕ МНОЖЕСТВО *в классе* $(K_4 - e)$*-свободных рёберно-симплициальных графов являются* NP*-полными. Свойство* NP*-полноты сохраняется для перечисленных задач и в классе* $\{K_{1,4}, K_4 - e\}$*-свободных рёберно-симплициальных графов со степенями вершин не более* 6*.*

---

[9] Независимые доминирующие и окрестностные множества в треугольных графах / Ю. Л. Орлович, В. С. Гордон, Я. Блажевич [и др.] // Докл. НАН Беларуси. — 2009. — Т. 53, № 1. — С. 39–44.

В **разделе 3.4** метод доказательства сложности аппроксимации задач о доминирующих множествах, использованный в разделе 3.2, адаптируется применительно к задачам о взвешенном независимом доминировании в степенях хордальных графов и в степенях рёберных графов от хордальных графов. Для этого рассматриваются k-дистанционные обобщения понятий взвешенного независимого доминирующего множества и взвешенного паросочетания в хордальных графах.

Следствие 3.4.2. *Существует положительная рациональная константа c, для которой при любом целом $\ell \geqslant 1$ задача построения $(c \ln |G|)$-приближённого решения задачи* ВЗВЕШЕННОЕ ЧИСЛО $(2\ell-1)$-НЕЗАВИСИМОГО ДОМИНИРОВАНИЯ *в классе хордальных графов является* NP-*трудной в сильном смысле.*

Следствие 3.4.3. *Существует положительная рациональная константа c, для которой при любом целом $\ell \geqslant 1$ задача построения $(c \ln |G|)$-приближённого решения задачи* ВЗВЕШЕННОЕ ЧИСЛО НЕЗАВИСИМОГО ДОМИНИРОВАНИЯ *в классе $(2\ell - 1)$-х степеней хордальных графов является* NP-*трудной в сильном смысле.*

Приведённый выше вершинный и нижеследующий рёберный варианты данного результата достаточно близки друг к другу (как по формулировке, так и по способу доказательства).

Теорема 3.4.4. *Существует положительная рациональная константа c, для которой при любом целом $\ell \geqslant 1$ задача построения $(c \ln |G|)$-приближённого решения задачи* ВЗВЕШЕННОЕ ЧИСЛО НАИМЕНЬШЕГО МАКСИМАЛЬНОГО 2ℓ-ДИСТАНЦИОННОГО ПАРОСОЧЕТАНИЯ *в классе хордальных графов является* NP-*трудной в сильном смысле.*

Следствие 3.4.5. *Существует положительная рациональная константа c, для которой при любом целом $\ell \geqslant 1$ задача построения $(c \ln |G|)$-приближённого решения задачи* ВЗВЕШЕННОЕ ЧИСЛО НЕЗАВИСИМОГО ДОМИНИРОВАНИЯ *в классе 2ℓ-х степеней ребёрных графов от хордальных графов является* NP-*трудной в сильном смысле.*

В **приложении А** содержится полная формулировка задач распознавания и оптимизации, фигурирующих в тексте диссертационной работы.

В **приложении Б** приводится иерархия исследуемых классов графов с краткой информацией об их свойствах, включениях и пересечениях со ссылками на соответствующие результаты в основном тексте диссертационной работы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные результаты диссертации

В следующих формулировках при указании результатов о сложности аппроксимации оптимизационной задачи символ $|G|$ обозначает порядок графа из условия этой задачи.

1. Охарактеризованы классы доминантно-треугольных [1, 7, 11, 12, 14], иррадантно-треугольных [1, 7, 11, 12, 14], совершенно-доминантно-треугольных [1], 1-треугольных [3, 5, 12, 14], связно-доминантно-треугольных [2, 10, 16] и совершенно-связно-окрестностных [2, 10] графов, определяемые в терминах взаимосвязи между окрестностными множествами вершин и другими классическими понятиями теории доминирования. Из полученных характеризаций следует существование полиномиальных алгоритмов распознавания принадлежности графа соответствующим классам. Установлен ряд результатов о равенстве, вложении и пересечении введённых и ряда известных классов графов (приложение Б).
2. Доказана NP-трудность задач построения $(c\ln|G|)$-приближённых решений для каждой из оптимизационных задач ЧИСЛО ДОМИНИРОВАНИЯ, ЧИСЛО СВЯЗНОГО ДОМИНИРОВАНИЯ, ОКРЕСТНОСТНОЕ ЧИСЛО, СВЯЗНОЕ ОКРЕСТНОСТНОЕ ЧИСЛО, ЧИСЛО ИРРИДАНТНОСТИ в классе симплициально-расщепляемых графов, где $c > 0$ — некоторая фиксированная рациональная константа [1, 2, 7, 11, 12, 16]. Тем самым, в предположении $P \neq NP$ для последних трёх задач впервые получен отрицательный ответ на вопрос о существовании приближённых полиномиальных алгоритмов с константными оценками точности.
3. Показано, что задачи ДОМИНИРУЮЩЕЕ МНОЖЕСТВО, ОКРЕСТНОСТНОЕ МНОЖЕСТВО, ИРРИДАНТНОЕ МНОЖЕСТВО, НЕЗАВИСИМОЕ ДОМИНИРУЮЩЕЕ МНОЖЕСТВО, НЕЗАВИСИМОЕ ОКРЕСТНОСТНОЕ МНОЖЕСТВО и СОВЕРШЕННОЕ ОКРЕСТНОСТНОЕ МНОЖЕСТВО в классе $\{K_{1,4}, K_4 - e\}$-свободных рёберно-симплициальных графов со степенями вершин не более 6 являются NP-полными [5, 12, 14].
4. Установлена NP-трудность в сильном смысле задачи построения $(c\ln|G|)$-приближённого решения для оптимизационных задач ВЗВЕШЕННОЕ ЧИСЛО $(2\ell - 1)$-НЕЗАВИСИМОГО ДОМИНИРОВАНИЯ и ВЗВЕШЕННОЕ ЧИСЛО НАИМЕНЬШЕГО МАКСИМАЛЬНОГО 2ℓ-ДИСТАНЦИОННОГО ПАРОСОЧЕТАНИЯ при любом целом $\ell \geqslant 1$ в классе хордальных графов, где $c > 0$ — некоторая фиксированная рациональная константа [4, 6, 9].

Рекомендации по практическому использованию результатов

Диссертация относится к теоретическим исследованиям. Развитые в ней идеи и разработанные методы расширяют круг знаний об объектах, изучаемых в рамках теории доминирования в графах, и могут быть использованы для продолжения исследований по данной тематике.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ АВТОРОМ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в научных журналах:

1. Картынник, Ю. А. Доминантно-треугольные графы и графы верхних границ / Ю. А. Картынник, Ю. Л. Орлович // Докл. НАН Беларуси. — 2014. — Т. 58, № 1. — С. 16–25.

2. Картынник, Ю. А. Алгоритмические свойства связных окрестностных множеств в графах / Ю. А. Картынник // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. — 2016. — № 3. — С. 30–37.

3. Иржавский, П. А. Характеризация 1-треугольных графов / П. А. Иржавский, Ю. А. Картынник, Ю. Л. Орлович // Докл. НАН Беларуси. — 2016. — Т. 60, № 4. — С. 17–24.

4. Kartynnik, Y. On minimum maximal distance-k matchings / Y. Kartynnik, A. Ryzhikov // Electron. Notes Discrete Math. — 2016. — Vol. 56. — P. 71–76. — TCDM 2016 — 1st IMA Conference on Theoretical and Computational Discrete Mathematics, 22–23 March 2016, The Enterprise Centre, University of Derby, UK.

5. Иржавский, П. А. 1-Треугольные графы и совершенные окрестностные множества / П. А. Иржавский, Ю. А. Картынник, Ю. Л. Орлович // Дискретн. анализ и исслед. операций. — 2017. — Т. 24, № 1. — С. 56–80. — Перевод на англ. яз.: Irzhavskii, P.A. 1-Triangle graphs and perfect neighborhood sets / P. A. Irzhavskii, Yu. A. Kartynnik, Yu. L. Orlovich // J. Appl. Ind. Math. — 2017. — Vol. 11, Issue 1. — P. 58–69.

6. Kartynnik, Y. On minimum maximal distance-k matchings / Y. Kartynnik, A. Ryzhikov // Discrete Math. Theor. Comput. Sci. — 2018. — Vol. 20, № 1. — 15 pp.

Статьи в сборниках материалов научных конференций:

7. Картынник, Ю. А. Доминантно-треугольные графы / Ю. А. Картынник // 69 Науч. конф. студентов и аспирантов Белорус. гос. ун-та: сб. работ, Минск, 14–17 мая 2012 г.: в 3 ч. — Мн.: БГУ, 2013. — Ч. 1. — С. 180–183.

8. Картынник, Ю. А. О характеризации хорошо k-согласованных графов обхвата не менее $4k + 4$ / Ю. А. Картынник, А. И. Рыжиков // 71 Науч. конф. студентов и аспирантов Белорус. гос. ун-та: сб. работ, Минск, 18–21 мая 2014 г.: в 3 ч. — Мн.: БГУ, 2014. — Ч. 1. — С. 71–75.

9. Картынник, Ю. А. Максимальные индуцированные паросочетания наименьшей мощности в графах / Ю. А. Картынник // 72 Науч. конф. студентов и аспирантов Белорус. гос. ун-та: сб. работ, Минск, 11–22 мая 2015 г.: в 3 ч. — Мн.: БГУ, 2015. — Ч. 1. — С. 63–66.

10. Kartynnik, Y. A. Connected domination-triangle graphs, perfect connected-neighbourhood graphs and connected neighbourhood sets / Y. A. Kartynnik, Y. L. Orlovich // Международный конгресс по информатике: информационные системы и технологии = International Congress on Computer Science: Information Systems and Technologies [Электронный ресурс]: материалы междунар. науч. конгресса, Минск, 24–27 октября 2016 г. / Под ред. С. В. Абламейко [и др.]. — Мн.: БГУ, 2016. — С. 1097–1101.

Тезисы докладов на научных конференциях:

11. Картынник, Ю. А. Доминантно-треугольные графы: характеризация и сложностные аспекты / Ю. А. Картынник, Ю. Л. Орлович // Междунар. науч. конф. «XI Белорусская математическая конференция»: Тез. докл. Междунар. науч. конф., Минск, 5–9 ноября 2012 г.: в 5 ч. / Под ред. С. Г. Красовского [и др.]. — Мн.: Институт математики НАН Беларуси, 2012. — Ч. 4. — С. 90.

12. Kartynnik, Y. Domination triangle, irredundance triangle, and 1-triangle graphs / Y. Kartynnik, P. Irzhavski, Y. Orlovich // 27th European Conference on Operational Research (EURO 2015), Glasgow, UK, 12–15 July 2015. — Glasgow, UK: University of Strathclyde, 2015. — P. 333.

13. Kartynnik, Y. Graphs with equal distance parameters / Y. Kartynnik, A. Ryzhikov // Дискретная математика, алгебра и их приложения: Тез. докл. Междунар. науч. конф., Минск, 14–18 сентября 2015 г. — Мн.: Институт математики НАН Беларуси, 2015. — С. 152–153.

14. Irzhavski, P. A. Domination triangle, irredundance triangle and 1-triangle graphs / P. A. Irzhavski, Y. A. Kartynnik, Y. L. Orlovich // Дискретная математика, алгебра и их приложения: Тез. докл. Междунар. науч. конф., Минск, 14–18 сентября 2015 г. — Мн.: Институт математики НАН Беларуси, 2015. — С. 150–152.

15. Duginov, O. I. Attaching rooted trees for proving hardness of independence-related problems in graphs / O. I. Duginov, Y. A. Kartynnik, A. I. Ryzhikov // Международная научная конференция «XII Белорусская математическая конференция»: материалы Междунар. науч. конф., Минск, 5–10 сентября 2016 г.: в 5 ч. / Под ред. С. Г. Красовского [и др.]. — Мн.: Институт математики НАН Беларуси, 2016. — Ч. 4. — С. 70–71.

16. Kartynnik, Y. A. Connected-domination triangle graphs and connected neighbourhood numbers / Y. A. Kartynnik, Y. L. Orlovich // Международная научная конференция «XII Белорусская математическая конференция»: материалы Междунар. науч. конф., Минск, 5–10 сентября 2016 г.: в 5 ч. / Под ред. С. Г. Красовского [и др.]. — Мн.: Институт математики НАН Беларуси, 2016. — Ч. 4. — С. 71–72.

РЭЗЮМЭ

Картыннік Юрый Анатольевіч

СТРУКТУРНЫЯ І АЛГАРЫТМІЧНЫЯ ЎЛАСЦІВАЦІ КЛАСАЎ ГРАФАЎ, ВЫЗНАЧАНЫХ У ТЭРМІНАХ НАВАКОЛЬНЫХ МНОСТВАЎ ВЯРШЫНЬ

Ключавыя словы. Дамінуючае мноства, незалежнае мноства, навакольнае мноства, трохкутны граф, CIS-граф, рэбрана-сімпліцыяльны граф, вылічальная складанасць.

Мэта працы — даследаваць структурныя ўласцівасці і атрымаць характэрызацыі класаў графаў, вызначаных у тэрмінах навакольных мностваў вяршынь, усталяваць іх суадносіны з вядомымі класамі графаў і паміж сабой, вызначыць іх месца ў іерархіі падкласаў класа трохкутных графаў і роднасных класаў; усталяваць вылічальную складанасць і складанасць апраксімацыі задачаў, звязаных з тэарэтыка-графавымі інварыянтамі тэорыі дамінавання, у гэтых класах графаў.

Метады даследвання — метады тэорыі графаў і тэорыі вылічальнай складанасці.

Атрыманыя вынікі і іх навізна. Усталяваныя структурныя характэрызацыі трохкутных, дамінантна-трохкутных, ірыдантна-трохкутных, дасканала-дамінантна-трохкутных, 1-трохкутных, злучна-дамінантна-трохкутных і дасканала-злучна-навакольных графаў, вызначаных праз узаемасувязь паміж навакольнымі мноствамі вяршыняў і іншымі класічнымі паняццямі тэорыі дамінавання ў графах. З атрыманых характэрызацый вынікае існаванне палінаміяльных алгарытмаў распазнавання прыналежнасці графа да адпаведных класаў. Усталяваны шэраг вынікаў аб роўнасці, укладанні і перакрыжаванні ўведзеных у дысертацыйнай працы і некаторых вядомых класаў графаў. Гэтыя вынікі дапаўняюць іншыя сучасныя даследванні аб іерархіі класаў графаў, злучаных з трохкутнымі і CIS-графамі. Атрыманыя ўласцівасці ўказаных класаў графаў выкарыстаны для ўстанаўлення вылічальнай складанасці і складанасці апраксімацыі задачаў, якія паслужылі матывацыяй для ўвядзення ў разгляд дадзеных класаў графаў. У прыватнасці, для задачаў НАВАКОЛЬНЫ ЛІК, ЗЛУЧАНЫ НАВАКОЛЬНЫ ЛІК, ЛІК ІРЫДАНТНАСЦІ даказана NP-складанасць задачы пабудовы $(c \ln n)$-набліжанага вырашэння (дзе c — некаторая фіксаваная рацыянальная канстанта, $n = |G|$ — парадак графа з умоваў задачы). Да гэтага для задач НАВАКОЛЬНЫ ЛІК і ЛІК ІРЫДАНТНАСЦІ была вядомая толькі іх NP-поўнасць, а задача ЗЛУЧАНЫ НАВАКОЛЬНЫ ЛІК, наколькі вядома аўтару, увогуле не разглядалася з пазіцыі тэорыі складанасці вылічэнняў. Акрамя таго, упершыню даказана NP-поўнасць задачы ДАСКАНАЛАЕ НАВАКОЛЬНАЕ МНОСТВА. Усталявана, што для некаторай станоўчай рацыянальнай канстан-

ты c задачы пабудовы $(c \ln n)$-набліжанага вырашэння задачаў УЗВАЖАНЫ ЛІК $(2\ell - 1)$-НЕЗАЛЕЖНАГА ДАМІНАВАННЯ і УЗВАЖАНЫ ЛІК НАЙМЕНШАГА МАКСІМАЛЬНАГА 2ℓ-ДЫСТАНЦЫЙНАГА ПАРАЗЛУЧЭННЯ пры любым цэлым $\ell \geqslant 1$ у класе хардальных графаў з'яўляюцца NP-складанымі ў моцным сэнсе, што ўзмацняе вядомы вынік Дж. Дж. Чанга аб NP-поўнасці задачы УЗВАЖАНЫ ЛІК НЕЗАЛЕЖНАГА ДАМІНАВАННЯ ў класе хардальных графаў.

Рэкамендацыі па практычным выкарыстанні вынікаў. Дысертацыя адносіцца да тэарэтычных даследванняў. Развітыя ў ёй ідэі і распрацаваныя метады пашыраюць круг ведаў аб аб'ектах, якія вывучаюцца ў межах тэорыі дамінавання ў графах, і могуць быць выкарыстаныя для працягу даследванняў па дадзенай тэматыцы.

РЕЗЮМЕ

Картынник Юрий Анатольевич

СТРУКТУРНЫЕ И АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КЛАССОВ ГРАФОВ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ В ТЕРМИНАХ ОКРЕСТНОСТНЫХ МНОЖЕСТВ ВЕРШИН

Ключевые слова. Доминирующее множество, независимое множество, окрестностное множество, треугольный граф, CIS-граф, рёберно-симплициальный граф, вычислительная сложность.

Цель работы — исследовать структурные свойства и получить характеризации классов графов, определяемых в терминах окрестностных множеств вершин, установить их отношения с известными классами графов и между собой, определить их место в иерархии подклассов класса треугольных графов и родственных классов; установить вычислительную сложность и сложность аппроксимации задач, связанных с теоретико-графовыми инвариантами теории доминирования, в этих классах графов.

Методы исследования — методы теории графов и теории вычислительной сложности.

Полученные результаты и их новизна. Установлены структурные характеризации для новых классов доминантно-треугольных, ирридантно-треугольных, совершенно-доминантно-треугольных, 1-треугольных, связно-доминантно-треугольных и совершенно-связно-окрестностных графов, определяемых в терминах взаимосвязи между окрестностными множествами вершин и другими классическими понятиями теории доминирования в графах. Из полученных характеризаций следует существование полиномиальных алгоритмов распознавания принадлежности графа соответствующим классам. Установлен ряд результатов о равенстве, вложении и пересечении введённых в диссертационной работе и ряда известных классов графов. Данные результаты дополняют другие современные исследования об иерархии классов графов, связанных с треугольными и CIS-графами. Полученные свойства указанных классов графов использованы для установления вычислительной сложности и сложности аппроксимации задач, которые послужили мотивацией для введения в рассмотрение данных классов графов. В частности, для задач ОКРЕСТНОСТНОЕ ЧИСЛО, СВЯЗНОЕ ОКРЕСТНОСТНОЕ ЧИСЛО, ЧИСЛО ИРРИДАНТНОСТИ доказана NP-трудность задачи построения $(c \ln n)$-приближённого решения (где c — некоторая фиксированная рациональная константа, $n = |G|$ — порядок графа из условия задачи). До этого для задач ОКРЕСТНОСТНОЕ ЧИСЛО и ЧИСЛО ИРРИДАНТНОСТИ была известна лишь их NP-полнота, а задача СВЯЗНОЕ ОКРЕСТНОСТНОЕ ЧИСЛО, по-видимому, вообще не рассматривалась с позиции теории сложности вычислений. Кроме того, впервые доказана NP-полнота за-

дачи СОВЕРШЕННОЕ ОКРЕСТНОСТНОЕ МНОЖЕСТВО. Установлено, что для некоторой положительной рациональной константы c задачи построения $(c \ln n)$-приближённых решений задач ВЗВЕШЕННОЕ ЧИСЛО $(2\ell - 1)$-НЕЗАВИСИМОГО ДОМИНИРОВАНИЯ и ВЗВЕШЕННОЕ ЧИСЛО НАИМЕНЬШЕГО МАКСИМАЛЬНОГО 2ℓ-ДИСТАНЦИОННОГО ПАРОСОЧЕТАНИЯ при любом целом $\ell \geqslant 1$ в классе хордальных графов являются NP-трудными в сильном смысле, что усиливает известный результат Дж. Дж. Чанга об NP-полноте задачи ВЗВЕШЕННОЕ ЧИСЛО НЕЗАВИСИМОГО ДОМИНИРОВАНИЯ в классе хордальных графов.

Рекомендации по практическому использованию результатов. Диссертация относится к теоретическим исследованиям. Развитые в ней идеи и разработанные методы расширяют круг знаний об объектах, изучаемых в рамках теории доминирования в графах, и могут быть использованы для продолжения исследований по данной тематике.

SUMMARY

Kartynnik, Yury Anatolyevich

STRUCTURAL AND ALGORITHMIC PROPERTIES OF VERTEX NEIGHBORHOOD SET-DEFINED GRAPH CLASSES

Key words. Dominating set, independent set, neighborhood set, triangle graph, CIS-graph, edge-simplicial graph, computational complexity.

The **goal of the work** is to study the structural properties and obtain characterizations of several graph classes defined in terms of vertex neighborhood sets, to find out their relations with known graph classes and with each other, to determine their places in the hierarchy of subclasses of the class of triangle graphs and related graph classes, and to establish computational complexity and complexity of approximation for the problems connected to some graph-theoretical invariants of domination theory in these graph classes.

The **methods of investigation** are the methods of graph theory and the methods of computational complexity theory.

Obtained results and their novelty. Structural characterizations for the new classes of domination-triangle, irredundance-triangle, 1-triangle, perfect domination-triangle, and perfectly-connected-neighborhood graphs, defined in terms of relations between neighborhood vertex sets and other classical notions of domination theory in graphs, have been obtained. The existence of polynomial algorithms for the recognition of the corresponding graph classes follows from these characterizations. A series of results on equality, inclusion, and intersections of the newly introduced and several known graph classes have been established. These results amend other modern studies on the hierarchy of graph classes connected to triangle graphs and CIS-graphs. The properties obtained for the mentioned graph classes have been used to establish the computational complexity of the problems serving as the motivation for the consideration of these graph classes. In particular, for the problems NEIGHBORHOOD NUMBER, CONNECTED NEIGHBORHOOD NUMBER, and IRREDUNDANCE NUMBER, the NP-hardness of $(c \ln n)$-approximation has been proven (where c is some fixed rational constant and $n = |G|$ is the problem instance graph order). Before that, for the problems NEIGHBORHOOD NUMBER and IRREDUNDANCE NUMBER only their NP-completeness had been known, and the problem CONNECTED NEIGHBORHOOD NUMBER had apparently not been studied from the perspective of computational complexity theory. Moreover, the NP-completeness of the PERFECT NEIGHBORHOOD SET problem has been proven for the first time. Also it has been established that for some positive rational constant c, $(c \ln n)$-approximation of the problems WEIGHTED $(2\ell - 1)$-INDEPENDENT DOMINATION NUMBER and WEIGHTED MINIMUM MAXIMAL DISTANCE-2ℓ MATCHING for any integer $\ell \geqslant 1$ in the class of chordal graphs are strongly NP-hard. This result

strengthens a well-known result due to G. J. Chang about the NP-completeness of the problem WEIGHTED INDEPENDENT DOMINATION NUMBER in the class of chordal graphs.

Recommendations on practical application of the results. The dissertation belongs to theoretical studies. The ideas and methods developed therein enlarge the scope of knowledge on the graph domination theory's subjects of study and can be used for further research on this topic.

Подписано в печать 16 мая 2019 г.
Формат $60 \times 84/16$.
Усл. печ. л. 2,22. Учетн. изд. л. 2,10.
Тираж 60 экз.   Заказ № 4.

Отпечатано на ризографе Института математики НАН Беларуси.
Издатель и полиграфическое исполнение:
Институт математики НАН Беларуси.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/257 от 2 апреля 2014 г.
220072, Минск, Сурганова, 11.