ГОСУДАРСТВЕННОЕ НАУЧНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ
НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ»

УДК 517.926+517.977

Инц
Ирина Викторовна

ГЛОБАЛЬНАЯ ЛЯПУНОВСКАЯ ПРИВОДИМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С ЛОКАЛЬНО ИНТЕГРИРУЕМЫМИ И ИНТЕГРАЛЬНО ОГРАНИЧЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

Минск, 2019

Работа выполнена в учреждении образования «Полоцкий государственный университет»

Научный руководитель: **КОЗЛОВ Александр Александрович,**
кандидат физ.-мат. наук, доцент,
заведующий кафедрой высшей математики,
Полоцкий государственный университет.

Официальные оппоненты: **МАЗАНИК Сергей Алексеевич,**
доктор физ.-мат. наук, профессор,
заведующий кафедрой высшей математики,
Белорусский государственный университет;

КАРПУК Михаил Васильевич,
кандидат физ.-мат. наук,
старший научный сотрудник
Государственного научного учреждения
«Институт математики Национальной
академии наук Беларуси».

Оппонирующая организация: **ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет»**

Защита состоится «27» июня 2019 г. в 13:30 на заседании совета по защите диссертаций Д 01.02.02 при Государственном научном учреждении «Институт математики Национальной академии наук Беларуси» по адресу: 220072, Республика Беларусь, г. Минск, ул. Сурганова, 11. Тел. учёного секретаря: (+375-17) 284-17-62. E-mail: vbened@im.bas-net.by.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Государственного научного учреждения «Институт математики Национальной академии наук Беларуси».

Автореферат разослан «...» мая 2019 г.

Учёный секретарь совета
по защите диссертаций, кандидат
физико-математических наук, доцент В. И. Бенедиктович

ВВЕДЕНИЕ

Задачи о глобальной ляпуновской приводимости и равномерной достижимости являются обобщением задачи глобального управления отдельными асимптотическими характеристиками линейных дифференциальных систем, которая, в свою очередь, возникает как естественное распространение известной проблемы теории автоматического регулирования о назначении спектра для линейных систем с постоянными коэффициентами на нестационарный случай.

Данной тематике, а также связанным с ней вопросам, посвящен ряд классических работ Р. Калмана, Н. Н. Красовского, В. М. Попова, М. Уонэма, П. Бруновского, В. А. Воловича, А. Чанга, М. Икеда, Х. Маеда, Ш. Кодама, Л. Сильвермана, Х. Медоуза, Б. Андерсона. Последующее развитие такого направления исследований было осуществлено Е. Л. Тонковым, Л. Е. Забелло, И. В. Гайшуном, Е. Я. Смирновым, В. Т. Боруховым, А. А. Леваковым, С. А. Минюком, А. И. Астровским, И. Н. Сергеевым, В. А. Луньковым, С. Н. Поповой, Е. К. Макаровым, В. А. Зайцевым, А. А. Козловым и другими.

Задача о назначении спектра стационарной системы, отвечающего за асимптотическое поведение ее решений, была полностью решена В. М. Поповым, который установил, что полная управляемость стационарной системы является необходимым и достаточным условием существования линейной обратной связи, реализующей наперед заданный спектр замкнутой системы. П. Бруновский осуществил перенос этого результата на периодические системы (под спектром такой системы понимается совокупность ее мультипликаторов).

Обобщением задачи о назначении спектра для общих нестационарных линейных систем с гладкими коэффициентами — вопросами управления их асимптотическими характеристиками — занимались Е. Я. Смирнов, И. В. Гайшун. В негладком случае Е. Л. Тонков предложил рассматривать эти вопросы при условии равномерной полной управляемости системы. В такой постановке наиболее существенное продвижение при решении данных задач, а также более общих вопросов о глобальной ляпуновской приводимости и равномерной глобальной достижимости систем было получено Е. Л. Тонковым, С. Н. Поповой, Е. К. Макаровым и В. А. Зайцевым. Основное внимание в их работах уделялось системам с медленно изменяющимися, в частности, кусочно равномерно непрерывными, коэффициентами. Поэтому актуальной представляется задача распространения этих результатов на более общие системы с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами.

Получение достаточных условий глобальной управляемости асимптотических характеристик (инвариантов) таких систем (в том числе, достаточных условий глобальной ляпуновской приводимости и равномерной глобальной достижимости этих систем) и составляет предмет настоящего исследования.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Диссертация посвящена исследованию условий глобальной ляпуновской приводимости и равномерной глобальной достижимости линейных нестационарных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами.

Связь работы с научными программами (проектами), темами. Работа выполнялась на кафедре высшей математики Полоцкого государственного университета с 2014 по 2017 гг. в соответствии с Государственной программой научных исследований «Конвергенция – 2020», подпрограмма 1 «Методы математического моделирования сложных систем», задание 1.2.01 «Управление асимптотической структурой линейной нестационарной системы обыкновенных дифференциальных уравнений» (сроки выполнения 2016 – 2020 гг., номер госрегистрации 20160439), проектами Белорусского республиканского Фонда фундаментальных исследований для молодых ученых Ф13М-055 «Глобальное управление полной совокупностью асимптотических инвариантов линейных дифференциальных систем с разрывными и быстро осциллирующими коэффициентами» (сроки выполнения 2013 – 2015 гг., номер госрегистрации 20131478), Ф16М-006 «Управление асимптотическими характеристиками линейных дифференциальных систем малых размерностей с наблюдателем» (сроки выполнения 2016 – 2018 гг., номер госрегистрации 20163156).

Цель и задачи исследования. Целью исследований является нахождение достаточных условий как глобальной управляемости отдельных асимптотических инвариантов (за исключением характеристических показателей Ляпунова) двумерной линейной нестационарной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами, так и глобальной ляпуновской приводимости и равномерной глобальной достижимости такой системы.

Для достижения этой цели решались следующие задачи:

— создать метод, позволяющий решать задачи глобального управления отдельными асимптотическими характеристиками двумерных линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами;

– установить признаки равномерной стабилизируемости и глобальной скаляризуемости таких систем;

– отыскать условия глобальной управляемости верхнего особого показателя Боля, коэффициентов неправильности Ляпунова, Перрона и Гробмана, свойств правильности и приводимости для двумерной линейной дифференциальной системы с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами;

– определить условия наличия свойств глобальной ляпуновской приводимости, а также равномерной глобальной достижимости у двумерных линейных дифференциальных систем с локально суммируемыми коэффициентами.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми, ранее неизвестными. Они распространяют классические результаты по управлению асимптотическими характеристиками линейных нестационарных дифференциальных систем с кусочно равномерно непрерывными и ограниченными коэффициентами на двумерные линейные системы с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами.

Положения, выносимые на защиту.

— доказательство пропорциональной глобальной управляемости верхнего особого (генерального) показателя Боля, глобальной управляемости коэффициентов неправильности Ляпунова, Перрона и Гробмана, свойств правильности и приводимости, а также равномерной стабилизируемости и глобальной скаляризуемости для двумерных линейных равномерно вполне управляемых систем с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами, которое основано на введенном понятии равномерной глобальной квазидостижимости линейной дифференциальной системы;

— установление глобальной ляпуновской приводимости двумерных линейных равномерно вполне управляемых (по Тонкову) систем с локально суммируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами;

— получение достаточных условий равномерной глобальной достижимости двумерных линейных нестационарных дифференциальных систем с локально интегрируемой и интегрально ограниченной матрицей коэффициентов.

Личный вклад соискателя ученой степени. Основные результаты, приведенные в диссертационной работе, получены автором самостоятельно. Все эти результаты опубликованы в совместных работах с научным руководителем соискателя А.А. Козловым, которому принадлежит постановка задачи и общее руководство. В совместных с Бураком А.Д. статье [1] и материалах конференции [5] последнему принадлежит только вводная обзорно-аналитическая часть.

Апробация результатов диссертации и информация об использовании ее результатов. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на:

– международной научной конференции молодых ученых «Молодежь в науке-2013», Минск, 19 – 22 ноября 2013 г.;

– XVI международной научной конференции по дифференциальным уравнениям ("ЕРУГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ-2014"), Новополоцк, 19 – 22 мая 2014 г.;

– XII международной научно-технической конференции «Наука - образованию, производству, экономике», Минск, 19 – 22 июня 2014 г.;

– международной научной конференции «Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование», Дивноморское, Краснодарский край, Российская Федерация, 7 – 13 сентября 2014 г.;

– международной научной конференции «Молодежь в науке-2014», Минск, 18 – 21 ноября 2014 г.;

– международной научной конференции «Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів», Ровно, Украина, 19 – 22 февраля 2015 г.;

– VII международной конференции молодых учёных «European and national dimension in research», Полоцк, 29 – 30 апреля 2015 г.;

– международной научно-практической конференции «Актуальные задачи математического моделирования и информационных технологий», Сочи, Российская Федерация, 15 – 24 мая 2015 г.;

– всероссийской конференции с международным участием, посвященной памяти проф. Н.В. Азбелева и проф. Е.Л. Тонкова «Теория управления и математическое моделирование», Ижевск, Российская Федерация, 9 – 11 июня 2015 г.;

– международной конференции по математической теории управления и механике, Суздаль, Российская Федерация, 2 – 7 июля 2015 г.;

– международной конференции «Колмогоровские чтения. Общие проблемы управления и их приложения. Проблемы преподавания математики» (ОПУ-2015), Тамбов, Российская Федерация, 8 – 12 октября 2015 г.;

– международной математической конференции «Шестые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям», Минск, 7 – 10 декабря 2015 г.;

– международной научной конференции «XII Белорусская математическая конференция», Минск, 5 – 10 сентября 2016 г.;

– научных семинарах по качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений кафедры математического анализа и геометрии Витебского государственного университета им. П. М. Машерова (Витебск, 2016 – 2017 гг.).

Опубликование результатов диссертации. По теме диссертационного исследования опубликовано 17 работ, в том числе: 4 статьи в научных журналах (4,75 авторских листа), 2 из которых («Дифференциальные уравнения» и «Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки») входят в наукометрические базы данных Scopus и Web of Science; 7 статей в сборниках материалов конференций, 6 публикаций в сборниках тезисов докладов на конференциях.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из оглавления, перечня сокращений и (или) условных обозначений, введения, общей характеристики работы, трех глав, заключения, библиографического списка. Полный объем диссертации составляет 131 страница машинописного текста, из них 15 страниц занимает библиографический список, состоящий из 163 наименований.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во **введении** обоснована тема диссертации и ее актуальность, отражено место диссертационной работы среди исследований в области теории управления асимптотическими инвариантами линейных дифференциальных систем.

В **первой главе** диссертации содержится краткий обзор важнейших результатов, связанных с управляемостью асимптотических инвариантов линейных систем. Результаты, наиболее близкие к теме данного исследования, представлены более подробно с включением формулировок основных теорем.

Пусть $\mathbb{R}^n$ — вещественное евклидово пространство размерности n с каноническим ортонормированным базисом $e_1, \ldots,\ e_n$ и нормой $\|x\| = \sqrt{x^T x}$. Обозначим через M_{mn} пространство вещественных матриц размерности $m \times n$ со спектральной нормой, т. е. операторной нормой, индуцируемой в M_{mn} евклидовыми нормами в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$; $\mathrm{M}_n := \mathrm{M}_{nn}$; $E \in \mathrm{M}_n$ — единичная матрица.

Рассматривается линейная нестационарная управляемая система

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

в которой матричные коэффициенты $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$ принадлежат некоторому заданному классу функций. Замкнем систему (1) при помощи линейной обратной связи $u = U(t)x$, в которой функциональная матрица $U(\cdot)$ (ее всюду далее будем называть *допустимым управлением*) выбирается из такого класса $m \times n$-матриц-функций, чтобы замкнутая однородная система

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)U(t))x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \tag{2}$$

при любом $U(\cdot)$ из этого класса принадлежала тому же множеству систем, что и *свободная система*, т.е. линейная система (1) с нулевым управлением

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0. \tag{3}$$

Определение 1.16. *Преобразованием Ляпунова называется линейное преобразование* $y = L(t)x$ *с обратимой абсолютно непрерывной матричной функцией* $L = L(t)$, *заданной на положительной полуоси со значениями во множестве* $n \times n$ *-матриц и удовлетворяющей для всех* $t \geqslant 0$ *неравенству*

$$\|L(t)\| + \|L^{-1}(t)\| + \int_t^{t+1} \|\dot{L}(\tau)\|\, d\tau < \infty.$$

Применение преобразования Ляпунова к системе (3) переводит ее в систему

$$\dot{y} = D(t)y, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \tag{4}$$

матрица коэффициентов которой равна $D(t) = L(t)A(t)L^{-1}(t) + \dot{L}(t)L^{-1}(t)$.

Определение 1.17. *Матрицы $A(\cdot)$ и $D(\cdot)$, связанные преобразованием Ляпунова, называются кинематически подобными, а соответствующие им системы (3) и (4) называются асимптотически эквивалентными (по Богданову).*

Определение 1.18. *Система (3) называется: приводимой к системе (4), если она асимптотически эквивалентна этой системе; приводимой, если она асимптотически эквивалентна некоторой стационарной системе (4).*

Определение 1.19. *Величины и свойства, сохраняющиеся под действием группы ляпуновских преобразований, называются ляпуновскими (асимптотическими) инвариантами.*

К асимптотическим инвариантам относят полный спектр характеристических показателей Ляпунова, коэффициенты неправильности σ_{Π} О. Перрона и σ_{Γ} Д. М. Гробмана, верхний равномерный $\overline{\beta}[x]$ и верхний особый (генеральный) $\Omega^0(A)$ показатели Боля, свойства асимптотической и неасимптотической устойчивости, свойства правильности, приводимости и многие другие.

Определение 1.20. *Коэффициентом неправильности Ляпунова $\sigma_{\text{Л}}(A)$ системы (3) называется число $\sigma_{\text{Л}}(A) := \lambda_1(A)+\ldots+\lambda_n(A) - \varliminf\limits_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathrm{Sp}A(\tau)d\tau$, в котором $\mathrm{Sp}\,A(\cdot)$ означает сумму диагональных элементов матрицы $A(\cdot)$; $\lambda_1(A) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(A)$ — полный спектр показателей Ляпунова системы (3).*

Определение 1.21. *Коэффициентом неправильности Перрона $\sigma_{\Pi}(A)$ системы (3) называется число $\sigma_{\Pi} := \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\lambda_i(A) + \mu_i(A)\}$, в котором $\mu_1(A) \geqslant \ldots \geqslant \mu_n(A)$ есть совокупность характеристических показателей Ляпунова сопряженной для системы (3) системы $\dot{y} = -A^T(t)y$, $y \in \mathbb{R}^n$, $t \geqslant 0$.*

Определение 1.22. *Дефектом или же коэффициентом неправильности Гробмана $\sigma_{\Gamma}(A)$ системы (3) называется число $\sigma_{\Gamma}(A) := \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\lambda_i + \delta_i\}$, где λ_i и δ_i суть характеристические показатели соответственно i-ого столбца фундаментальной матрицы системы (3), соответствующей нормальной фундаментальной системе решений этой системы, и i-ой строки обратной ей матрицы.*

Определение 1.23. *Линейная дифференциальная система (3) называется правильной, если ее коэффициент неправильности Ляпунова равен нулю.*

Определение 1.24. *Задача глобального управления асимптотическим инвариантом ι заключается в нахождении такого допустимого управления, что замкнутая система (2) с этим управлением будет иметь любое возможное наперед заданное значение этого инварианта.*

Так, например, рассматривая в данной задаче в качестве инварианта ι верхний особый показатель Боля, получим *задачу глобального управления верхним особым показателем Боля*; рассматривая в качестве инварианта свойство правильности системы (2), будем иметь *задачу глобального управления правильностью* этой системы и т.д.

Определение 1.9. *Система* (2) *называется равномерно стабилизируемой, если для каждого* $\alpha > 0$ *найдется такое допустимое управление, что верхний равномерный показатель Боля* $\overline{\beta}[x]$ *всякого нетривиального решения* $x_U(\cdot)$ *системы* (2) *с этим управлением* U *удовлетворяет неравенству* $\overline{\beta}[x] < -\alpha$.

Е. К. Макаров и С. Н. Попова установили[1] как равномерную стабилизируемость, так и глобальную управляемость верхнего особого (генерального) показателя Боля системы (2) с кусочно-непрерывными и ограниченными коэффициентами при условии кусочной равномерной непрерывности матрицы B и равномерной полной управляемости соответствующей линейной системы (1).

Определение 1.11. *Матричная функция* $B : [0, +\infty) \to \mathrm{M}_{mn}$ *называется кусочно равномерно непрерывной на положительной полуоси, если она удовлетворяет следующим условиям:*
1) функция B *кусочно непрерывна и ограничена на положительной полуоси;*
2) существует такое $\Delta_0 > 0$, *что длина каждого интервала непрерывности* I_j $(j \in J \subset \mathbb{N})$ *функции* B *удовлетворяет неравенству* $|I_j| \geqslant \Delta_0$;
3) для любого $\varepsilon > 0$ *найдется такое* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, *что для каждого* $j \in J$ *и для всех* $t, s \in I_j$, *удовлетворяющих неравенству* $|t - s| \leqslant \delta$, *выполнено соотношение* $\|B(t) - B(s)\| \leqslant \varepsilon$.

Определение 1.5. *Система* (1) *называется равномерно вполне управляемой, если существуют такие числа* $\sigma > 0$ *и* $\gamma > 0$, *что при любых* $t_0 \geqslant 0$ *и* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *на отрезке* $[t_0, t_0 + \sigma]$ *найдется допустимое управление* u, *при всех* $t \in [t_0, t_0 + \sigma]$ *удовлетворяющее неравенству* $\|u(t)\| \leqslant \gamma \|x_0\|$ *и переводящее вектор начального состояния* $x(t_0) = x_0$ *системы* (1) *в ноль на этом отрезке.*

Утверждения, аналогичные установленным Е. К. Макаровым и С. Н. Поповой, были получены В. А. Зайцевым[2], но уже без предположения кусочной равномерной непрерывности матрицы B.

Для линейной системы (2) с кусочно непрерывными и ограниченными матрицами A и B при условии кусочной равномерной непрерывности матрицы B и равномерной полной управляемости системы (1) С. Н. Поповой доказана[3]

[1] *Макаров, Е. К.* О глобальной управляемости центральных показателей линейных систем / Е. К. Макаров, С. Н. Попова // Известия вузов. Математика. — 1999. — № 2 (441). — С. 60–67.

[2] *Зайцев, В. А.* Об управлении показателями Ляпунова и λ-приводимости / В. А. Зайцев // Вестник Удмуртского ун-та. — 2000. — № 1. — С. 35–44.

[3] *Попова, С. Н.* Глобальная приводимость линейных управляемых систем к системам скалярного типа / С. Н. Попова // Дифференц. уравнения. — 2004. — Т. 40, № 1. — С. 41–46.

глобальная управляемость свойств правильности и приводимости, коэффициентов неправильности $\sigma_{\text{Л}}$ Ляпунова, $\sigma_{\text{П}}$ Перрона и σ_{Γ} Гробмана, верхнего особого показателя Боля Ω^0 и некоторых других инвариантов. Это доказательство было основано на факте наличия глобальной скаляризуемости у системы (2), соответствующей равномерно вполне управляемой системе (1).

Определение 1.26. *Будем говорить, что система* (2) *глобально скаляризуема, если для любой наперед заданной кусочно-непрерывной и ограниченной на положительной полуоси скалярной функции* $p = p(t),\ t \geqslant 0$, *существует такое допустимое управление, что система* (2) *с этим управлением асимптотически эквивалентна системе скалярного типа* $\dot z = p(t)z$, $z \in \mathbb{R}^n,\ t \geqslant 0$.

С. Н. Поповой было также установлено[4], что если система (1) с кусочно-непрерывными и ограниченными коэффициентами равномерно вполне управляема, а матрица B кусочно равномерно непрерывна, то полный спектр характеристических показателей Ляпунова соответствующей замкнутой системы (2) глобально управляем. В дальнейшем А.А. Козлову удалось обобщить[5, 6] этот результат на дву- и трехмерные линейные нестационарные системы (1) с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами.

Вместе с вопросами управления отдельными ляпуновскими инвариантами рассматривается и более общая задача глобальной ляпуновской приводимости.

Определение 1.27. *Система* (2) *обладает свойством глобальной ляпуновской приводимости, если для любой системы* (4) *с ограниченными кусочно-непрерывными коэффициентами найдется такое допустимое управление, что система* (2) *с этим управлением асимптотически эквивалентна системе* (4).

Свойство глобальной ляпуновской приводимости означает, что при любой наперед заданной линейной системе (4) для системы (2) найдется допустимое управление, которое обеспечит качественную «схожесть» характеров поведения в окрестности времени $+\infty$ решений системы (2) с этим управлением и системы (4). Поскольку в этом случае каждый ляпуновский инвариант системы (2) окажется равным соответствующему инварианту системы (4), то выбором управления значение всякого (одного или нескольких) рассматриваемого нами асимптотического инварианта системы (2) можно сделать совпадающим с любым допустимым наперед заданным значением. Поэтому свойство глобальной ляпуновской приводимости называют еще и свойством *глобальной*

---

[4] *Попова, С. Н.* О глобальной управляемости показателей Ляпунова линейных систем / С. Н. Попова // Дифференц. уравнения. — 2007. — Т. 43, № 8. — С. 1048–1054.

[5] Козлов, А. А. Об управлении показателями Ляпунова двумерных линейных систем с локально интегрируемыми коэффициентами / А. А. Козлов // Дифференц. уравнения. — 2008. — Т. 44, № 10. — С. 1319–1335.

[6] *Козлов, А. А.* Об управлении характеристическими показателями трехмерных линейных дифференциальных систем с разрывными и быстро осциллирующими коэффициентами / А. А. Козлов, А. Д. Бурак // Веснік ВДУ. — 2013. — № 5(77). — С. 11 – 31.

управляемости полной совокупности асимптотических инвариантов.

Е. К. Макаров и С. Н. Попова установили[7] для случая $n = 2$, что если система (1) с кусочно-непрерывными и ограниченными коэффициентами равномерно вполне управляема и матрица B этой системы равномерно непрерывна, то система (2) обладает свойством глобальной ляпуновской приводимости.

С. Н. Поповой для ω-периодической системы (1) с кусочно непрерывными коэффициентами доказано[8], что равномерная полная управляемость системы (1) является необходимым и достаточным условием глобальной ляпуновской приводимости соответствующей замкнутой системы (2). Ею также получены[9] условия глобальной управляемости полной совокупности асимптотических инвариантов системы (2) с почти периодическими по Бору коэффициентами. Достаточные условия глобальной ляпуновской приводимости линейной системы (2) с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами в специальной нижней форме Хессенберга предложены В. А. Зайцевым[10]. Для общих же линейных равномерно вполне управляемых систем (1) с локально суммируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами А. А. Козлов установил[11] глобальную ляпуновскую приводимость лишь в двумерном случае при дополнительном условии нулевой матрицы A.

Определение 1.29. *Будем говорить, что система* (2) *обладает свойством равномерной глобальной достижимости, если существует такое* $T > 0$, *что для любых* $r \geqslant 1$ *и* $0 < \rho \leqslant 1$ *найдется такая величина* $\theta = \theta(r, \rho) > 0$, *при которой для произвольной* $n \times n$*-матрицы* H, *удовлетворяющей неравенствам* $\|H - E\| \leqslant r$ *и* $\det H \geqslant \rho$, *и всякого* $t_0 \geqslant 0$ *на отрезке* $[t_0, t_0 + T]$ *существует допустимое управление, удовлетворяющее при всех* $t \in [t_0, t_0 + T]$ *оценке* $\|U(t)\| \leqslant \theta(r, \rho)$ *и гарантирующее для матрицы Коши* $X_U(t, s)$ *системы* (2) *выполнение равенства* $X_U(t_0+T, t_0) = H$.

Наличие у линейной системы (2) свойства равномерной глобальной достижимости обеспечивает возможность управления всем конечномерным базисом пространства решений этой системы на произвольном временно́м отрезке фиксированной длины T, т. е. указывает на возможность выбора такого

[7] *Макаров, Е. К.* О глобальной управляемости полной совокупности ляпуновских инвариантов двумерных линейных систем / Е. К. Макаров, С. Н. Попова // Дифференц. уравнения. — 1999. — Т. 35, № 1. — С. 97–106.

[8] *Попова, С. Н.* Глобальная управляемость полной совокупности ляпуновских инвариантов периодических систем / С. Н. Попова // Дифференц. уравнения. — 2003. — Т. 39, № 12. — С. 1627–1636.

[9] *Попова, С. Н.* Управление асимптотическими инвариантами систем с почти периодическими коэффициентами / С. Н. Попова // Теория управления и математическое моделирование (IMS-2008): материалы науч. конф., Ижевск, 4 – 9 мая 2008 г. / Вестник Удмуртского ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2008. — Вып. 2. — С. 117–118.

[10] *Зайцев, В. А.* Равномерная полная управляемость и глобальное управление асимптотическими инвариантами линейной системы в форме Хессенберга / В. А. Зайцев // Вестник Удмуртского ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2015. — Т. 25, № 3. — С. 318–337.

[11] *Козлов, А. А.* О частном случае глобальной ляпуновской приводимости двумерных систем / А. А. Козлов // Веснік ВДУ. — 2008. — № 3(49). — С. 105–110.

матричного управляющего воздействия U, при котором совокупность $\{x_i(t)\}_{i=1}^n$ линейно-независимых решений системы (2) с этим управлением и начальными условиями — соответствующими векторами e_i, $i = \overline{1, n}$, канонического ортонормированного базиса пространства $\mathbb{R}^n$ — через время T будет совпадать с произвольным наперед заданным правым базисом этого пространства.

Решением задачи о равномерной глобальной достижимости занимались Е. Л. Тонков, В. А. Зайцев, А. А. Козлов, И. Н. Сергеев, Е. К. Макаров, С. Н. Попова. В частности, последними для системы с кусочно непрерывными и ограниченными коэффициентами был получен следующий результат [7]: *Для любой двумерной линейной равномерно вполне управляемой системы* (1) *с кусочно непрерывными и ограниченными коэффициентами и кусочно равномерно непрерывной матрицей* $B(\cdot)$ *соответствующая замкнутая система* (2) *обладает свойством равномерной глобальной достижимости.* Условия равномерной глобальной достижимости линейной системы (2) с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами специального вида — в нижней форме Хессенберга — изучались В. А. Зайцевым[12]. Нахождение же достаточных условий равномерной глобальной достижимости линейных нестационарных систем (2) с локально суммируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами общего вида ранее не проводилось.

В связи с вышеперечисленными результатами как по управлению отдельными асимптотическими инвариантами, так и по глобальной ляпуновской приводимости, а также равномерной глобальной достижимости линейных дифференциальных систем (2) с кусочно-непрерывными и ограниченными коэффициентами возникает вопрос о возможности распространения этих результатов на более широкий класс линейных нестационарных систем (2) с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами.

Во **второй главе** разработан метод управления асимптотическими инвариантами двумерных линейных нестационарных систем (2), опирающийся на введенное свойство равномерной глобальной квазидостижимости. На основе этого метода установлены достаточные условия пропорциональной глобальной управляемости верхнего особого показателя Боля, глобальной управляемости коэффициентов неправильности Ляпунова, Перрона и Гробмана, свойств правильности и приводимости двумерных линейных дифференциальных систем (2) с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными матрицами коэффициентов A и B, а также доказано наличие у таких систем свойств равномерной стабилизируемости и глобальной скаляризуемости.

Рассмотрим линейную нестационарную управляемую систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad t \geqslant 0. \tag{5}$$

[12] *Зайцев, В. А.* К теории стабилизации управляемых систем: дис. ... докт. физ.-мат. наук: 01.01.02 / В. А. Зайцев. — Ижевск, 2015. — 293 л.

Будем предполагать, что матричные функции $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$ по норме локально интегрируемы по Лебегу и интегрально ограничены, то есть для матриц A и B имеют место оценки $\sup\limits_{t\geqslant 0}\int_t^{t+1}\|A(\tau)\|\,d\tau<+\infty$, $\sup\limits_{t\geqslant 0}\int_t^{t+1}\|B(\tau)\|\,d\tau<+\infty$. Замыкая систему (5) при помощи линейной обратной связи $u=U(t)x$, где U — некоторая измеримая и ограниченная на положительной полуоси $m\times n$-матрица, получим замкнутую однородную дифференциальную систему

$$\dot{x}=(A(t)+B(t)U(t))x,\quad x\in\mathbb{R}^n,\quad t\geqslant 0, \tag{6}$$

с локально суммируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами.

Обозначим через $X_U(t,s)\in \mathrm{M}_n$, $t,s\geqslant 0$, матрицу Коши системы (6) с управлением U, а через $X(t,s):=X_0(t,s)$, $t,s\geqslant 0$, — матрицу Коши системы (6) с нулевым управлением.

В **параграфе 2.1** показано, что свойство равномерной полной управляемости (по Тонкову) линейной нестационарной управляемой системы (5) инвариантно относительно преобразования Ляпунова этой системы.

Следствие 2.1. [4] *Преобразование Ляпунова сохраняет свойство равномерной полной управляемости (по Тонкову) системы, т. е. если система* (5) *с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами равномерно вполне управляема (по Тонкову), то преобразованная с помощью ляпуновского преобразования $y=L(t)x$ линейная управляемая система*

$$\dot{y}=\big(L(t)A(t)L^{-1}(t)+\dot{L}(t)L^{-1}(t)\big)y+L(t)B(t)u,\quad t\geqslant 0, \tag{7}$$

также является равномерно вполне управляемой.

Замечание 2.1. *Для системы* (5) *с кусочно непрерывными и ограниченными коэффициентами и интегрируемой с квадратом матрицей B аналогичное утверждение было установлено С. Н. Поповой*[13].

Следствие 2.1 вытекает из инвариантности относительно ляпуновского преобразования свойства $H(\sigma)$ системы (5), введенного В. А. Зайцевым[14] и обобщающего понятие равномерной полной управляемости линейной системы (5).

Определение 2.2. *Будем говорить, что система* (5) *обладает свойством $H(\sigma)$ (где $\sigma>0$), если существуют $\beta_i=\beta_i(\sigma)>0$, $i=\overline{1,4}$, такие, что для любого числа $\tau\geqslant 0$ и всякого вектора $h\in\mathbb{R}^n$ выполнены неравенства*

$$\beta_1\|h\|\leqslant\int_\tau^{\tau+\sigma}\|h^TX(\tau,s)B(s)\|\,ds\leqslant\beta_2\|h\|,$$
$$\beta_3\|h\|\leqslant\int_\tau^{\tau+\sigma}\|h^TX(\tau+\sigma,s)B(s)\|\,ds\leqslant\beta_4\|h\|.$$

[13] *Попова, С. Н.* Задачи управления показателями Ляпунова: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02 / С. Н. Попова. — Ижевск, 1992. — 103 л.

[14] *Зайцев, В. А.* Критерии равномерной полной управляемости линейной системы / В. А. Зайцев // Вестник Удмуртского ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2015. — Т. 25, № 2. — С. 157–179.

Теорема 2.1. [4] *Преобразование Ляпунова сохраняет свойство $H(\sigma)$ системы, т. е. если система* (5) *обладает свойством $H(\sigma)$ и $y = L(t)x$ — преобразование Ляпунова, то система* (7) *также обладает свойством $H(\sigma)$.*

В **параграфе 2.2** дано определение равномерной глобальной квазидостижимости, пояснена суть введенного понятия и показано, что наличие у двумерной линейной управляемой системы (5) с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами свойства равномерной полной управляемости является достаточным условием равномерной глобальной квазидостижимости соответствующей ей замкнутой однородной системы (6).

Обозначим через R_n множество всех верхнетреугольных $n \times n$-матриц с положительными диагональными элементами. Тогда для любых чисел $r \geqslant 1$ и $0 < \rho \leqslant 1$ через $\mathcal{R}_n(r, \rho)$ всюду далее будем обозначать множество матриц

$$\mathcal{R}_n(r, \rho) := \{H \in \mathrm{R}_n : \|H - E\| \leqslant r,\ \det H \geqslant \rho\}.$$

Определение 2.3. [2, 4, 7, 8, 11, 10] *Будем говорить, что система* (6) *обладает свойством:*
1) T-равномерной глобальной квазидостижимости относительно неограниченного множества $\mathbb{U} \subset \mathrm{M}_{mn}$, если для любых $r \geqslant 1$ и $0 < \rho \leqslant 1$ существует такая величина $\theta = \theta(r, \rho) > 0$, что для всякого $t_0 \geqslant 0$ найдется ортогональная матрица $F = F(t_0, r, \rho) \in \mathrm{M}_n$, при которой для произвольной матрицы $H \in \mathcal{R}_n(r, \rho)$ существует измеримое и ограниченное управление $U : [t_0, t_0 + T] \to \mathbb{U}$, удовлетворяющее при всех $t \in [t_0, t_0 + T]$ оценке $\|U(t)\| \leqslant \theta(r, \rho)$ и гарантирующее для матрицы Коши $X_U(t, s)$ системы (6) *выполнение равенства $X_U(t_0 + T, t_0) = X(t_0 + T, t_0)FHF^{-1}$;*
2) T-равномерной глобальной квазидостижимости, если она T-равномерно глобально квазидостижима относительно множества $\mathbb{U} = \mathrm{M}_{mn}$;
3) равномерной глобальной квазидостижимости, если она T-равномерно глобально квазидостижима при некотором $T > 0$.

Заметим, что равномерная глобальная квазидостижимость является ослаблением свойства равномерной глобальной достижимости (определение 1.29).

Определение 2.5. [2, 3] *Система* (6) *обладает свойством пропорциональной T-равномерной глобальной квазидостижимости, если для некоторого $T > 0$ при каждом $t_0 \geqslant 0$ и любых $r \geqslant 1$ и $0 < \rho \leqslant 1$ существуют ортогональная матрица $F = F([t_0, t_0 + T]; r, \rho) \in \mathrm{M}_n$ и не зависящая от t_0 величина $\theta = \theta(r, \rho) > 0$, такие, что для произвольной матрицы $H \in \mathcal{R}_n(r, \rho)$ найдется измеримое и ограниченное на отрезке $[t_0, t_0 + T]$ управление $U = U(t)$, удовлетворяющее при всех $t \in [t_0, t_0 + T]$ оценке $\|U(t)\| \leqslant \theta\|H - E\|$ и гарантирующее для матрицы Коши $X_U(t, s)$ системы* (6) *выполнение равенства $X_U(t_0 + T, t_0) = X(t_0 + T, t_0)FHF^{-1}$.*

В разделе 2.2.3 установлена связь между свойствами равномерной полной управляемости и равномерной глобальной квазидостижимости для двумерной системы (5) с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами.

Рассмотрим двумерную линейную нестационарную управляемую систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad m \in \{1, 2\}, \quad t \geqslant 0, \tag{8}$$

с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными матрицами коэффициентов A и B. Если управление u в системе (8) задано в виде

$$u = U(t)x,$$

где $m \times 2$ -матрица U предполагается измеримой и ограниченной на положительной полуоси, то система (8) переходит в однородную замкнутую систему

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)U(t))x, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t \geqslant 0, \tag{9}$$

с локально суммируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами.

Теорема 2.2. [2, 7, 8] *Если система* (8) σ *-равномерно вполне управляема, то соответствующая ей система* (9) *обладает свойством пропорциональной* 2σ*-равномерной глобальной квазидостижимости.*

Доказательство этой теоремы содержит конструктивное построение измеримого и ограниченного управляющего воздействия U (в виде сигнум-функций от элементов матрицы при управлении в системе (8) и матрицы Коши этой системы с нулевым управлением), обеспечивающего пропорциональную равномерную глобальную квазидостижимость системы (9).

Следствие 2.2. [2, 7, 8] *Если система* (8) σ *-равномерно вполне управляема, то соответствующая ей система* (9) *обладает свойством* 2σ*-равномерной глобальной квазидостижимости.*

Теорема 2.2 и следствие 2.2 позволяют доказать (**параграфы 2.3** и **2.4**) пропорциональную глобальную управляемость верхнего особого (генерального) показателя Боля, а также глобальную скаляризуемость двумерной системы (9) с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами при условии равномерной полной управляемости соответствующей ей системы (8).

Определение 2.10. *Верхний особый (генеральный) показатель Боля системы* (6) *пропорционально глобально управляем на множестве* $\{\mu \in \mathbb{R} : |\mu| \leqslant \mu_0\}$ *при каждом* $\mu_0 > 0$, *если для каждого* $\mu_0 > 0$ *существует* $l = l(\mu_0) > 0$ *такое, что для любого* $\mu \in \mathbb{R}$, $|\mu| \leqslant \mu_0$, *найдётся допустимое управление* $U_\mu : [0, +\infty) \to \mathrm{M}_{mn}$, *удовлетворяющее при всех* $t \geqslant 0$ *оценке* $\|U_\mu(t)\| \leqslant l|\mu|$ *и обеспечивающее для верхнего особого показателя Боля* $\Omega^0(A + BU_\mu)$ *системы* (6) *с* $U = U_\mu(\cdot)$ *равенство* $\Omega^0(A + BU_\mu) = \Omega^0(A) + \mu$.

Теорема 2.3. [1, 3, 5, 12] *Если линейная система* (8) *с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами равномерно вполне управляема, то верхний особый (генеральный) показатель Боля* *соответствующей ей замкнутой линейной системы* (9) *пропорционально глобально управляем на множестве* $\{\mu \in \mathbb{R} : |\mu| \leqslant \mu_0\}$ *при каждом* $\mu_0 > 0$.

Метод доказательства данной теоремы, а также нижеприведенных теорем 2.5-2.6 и их следствий 2.3-2.6, аналогичен подходу С.Н. Поповой [3]. Однако, базируясь на теореме 2.2 и ее следствии 2.2, он позволяет распространить результаты, полученные для линейных систем (6) с кусочно равномерно непрерывными и ограниченными коэффициентами, на двумерные системы (8) с локально суммируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами.

Поскольку верхний особый показатель системы (3) является достижимой верхней границей для верхних равномерных показателей Боля всех нетривиальных решений этой системы, то в силу определения 1.9 справедливо

Следствие 2.3. [1, 3, 5, 12] *Если линейная система* (8) *равномерно вполне управляема, то соответствующая система* (9) *равномерно стабилизируема.*

Возможность получения в **параграфе 2.4** достаточных условий глобальной скаляризуемости системы (9) с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами обеспечивает вытекающее из следствия 2.2 утверждение.

Теорема 2.4. [2] *Если система* (8) σ*-равномерно вполне управляема, то при любых числах* $r \geqslant 1$, $0 < \rho \leqslant 1$ *и* $k \in \mathbb{N}$ *существуют такие ортогональные матрицы* $F_k = F([2(k-1)\sigma, 2k\sigma]; r, \rho) \in \mathrm{M}_2$, *что какова бы ни была последовательность матриц* $\{H_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{R}_2(r, \rho)$, *найдется допустимое управление* $U = U(t)$, $t \in [0, +\infty)$, *при котором для всякого* $k \in \mathbb{N}$ *выполняются равенства* $X_U(2k\sigma, 2(k-1)\sigma) = X(2k\sigma, 2(k-1)\sigma)F_k H_k F_k^{-1}$.

На основании такого утверждения установлены следующие результаты:

Теорема 2.5. [1, 2, 12] *Если линейная управляемая система* (8) *с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами равномерно вполне управляема, то соответствующая ей замкнутая система* (9) *обладает свойством глобальной скаляризуемости.*

Следствие 2.4. [1, 2, 12] *Если двумерная линейная управляемая система* (8) *с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами равномерно вполне управляема, то существует такое допустимое управление, что соответствующая ей система* (9) *с этим управлением асимптотически эквивалентна системе* $\dot{y} = 0$, $y \in \mathbb{R}^2$, $t \geqslant 0$.

Наличие свойства глобальной скаляризуемости у линейной дифференциальной системы (9) с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами обеспечивает глобальную управляемость ее коэффициентов неправильности Ляпунова, Перрона и Гробмана, свойств правильности и приводимости. Доказательство этих утверждений содержится в **параграфе 2.5** диссертации.

Теорема 2.6. [1, 5] *Если система* (8) *с локально интегрируемыми и* *интегрально ограниченными коэффициентами равномерно вполне управляема, то соответствующая ей система* (9) *обладает свойством глобальной управляемости коэффициентов неправильности Ляпунова, Перрона и Гробмана.*

Следствие 2.5. [1, 5] *Если двумерная линейная управляемая система* (8) *с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами равномерно вполне управляема, то соответствующая ей система* (9) *обладает свойством глобальной управляемости правильности.*

Следствие 2.6. [1, 5] *Если линейная управляемая система* (8) *с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами равномерно вполне управляема, то соответствующая ей линейная система* (9) *обладает свойством глобальной управляемости приводимости.*

В **главе 3** диссертации получены достаточные условия глобальной управляемости полной совокупности асимптотических инвариантов (глобальной ляпуновской приводимости), а также равномерной глобальной достижимости двумерных линейных нестационарных дифференциальных систем (9) с локально интегрируемой и интегрально ограниченной матрицей коэффициентов.

В **параграфе 3.1** на основании следствия 2.4, а также результатов Козлова А. А. по глобальной ляпуновской приводимости двумерных систем (9) в частном случае[11] установлены достаточные условия глобальной ляпуновской приводимости двумерной линейной нестационарной дифференциальной системы (9) с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами.

Теорема 3.1. [2, 6, 11, 13, 14] *Если двумерная линейная управляемая система* (8) *с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами равномерно вполне управляема, то соответствующая ей система* (9) *обладает свойством глобальной ляпуновской приводимости.*

В **параграфе 3.2** на основе специально созданной факторизации 2×2-матриц с положительным определителем, а также результатов А. А. Козлова[11] по глобальной ляпуновской приводимости двумерной системы (9) с нулевой матрицей A устанавливается равномерная глобальная достижимость двумерных линейных систем (9) с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными матрицами A и B в случае наличия свойства равномерной полной управляемости у соответствующей линейной системы (8).

В разделе 3.2.1 предложен конструктивный способ представления вещественной 2×2-матрицы с положительным определителем в виде произведения семи треугольных 2×2-матриц с положительной диагональю, удовлетворяющих также дополнительным оценкам на их норму и определитель.

Основополагающую роль в получении этого способа играет следующая

Лемма 3.1. [4] *Для 2×2-матриц* $E_1 := E + e_1e_2^T,\ E_2 := E_1^T = E + e_2e_1^T,$

$E_3 := E_1^2 = E + 2e_1e_2^T$ *выполняются равенства*

$$E_1^{-1} = E - e_1e_2^T, \quad E_2^{-1} = E - e_2e_1^T, \quad E_1^{-1} \cdot E_2 \cdot E_1^{-1} = e_2e_1^T - e_1e_2^T,$$

$$E_1 \cdot E_2^{-1} \cdot E_1 = e_1e_2^T - e_2e_1^T, \quad E_1 \cdot E_2^{-1} \cdot E_3 \cdot E_2^{-1} \cdot E_1 = -E.$$

Для всяких чисел $r \geqslant 1$ и $0 < \rho \leqslant 1$ обозначим через $\mathcal{M}_2(r,\rho) \subset \mathrm{M}_2$ множество матриц $H \in \mathrm{M}_2$, удовлетворяющих оценкам $\|H - E\| \leqslant r$ и $\det H \geqslant \rho$, т.е. множество $\mathcal{M}_2(r,\rho) := \{H \in \mathrm{M}_2 : \|H - E\| \leqslant r,\ \det H \geqslant \rho\}$.

Пусть $\mathcal{LR}_2 \subset \mathrm{M}_2$ — совокупность всех нижне- и верхнетреугольных 2×2-матриц с положительными диагональными элементами. Тогда при любых числах $r \geqslant 1$ и $0 < \rho \leqslant 1$ через $\mathcal{LR}_2(r,\rho) \subset \mathrm{M}_2$ будем обозначать множество $\mathcal{LR}_2(r,\rho) := \mathcal{LR}_2 \cap \mathcal{M}_2(r,\rho) = \{H \in \mathcal{LR}_2 : \|H - E\| \leqslant r,\ \det H \geqslant \rho\}$.

На основании леммы 3.1 устанавливается следующая теорема о факторизации произвольной квадратной 2×2-матрицы с положительным определителем.

Теорема 3.2. [4, 17] *Для любых чисел $r \geqslant 1$ и $0 < \rho \leqslant 1$ и всякой матрицы $H \in \mathcal{M}_2(r,\rho)$ найдутся такие матрицы $H_i \in \mathcal{LR}_2(r_1,\rho)$, $i = \overline{1,7}$, где $r_1 := 3(r+1)$, при которых матрица H представляется в виде $H = H_7 \cdot \ldots \cdot H_1$.*

Данная факторизация матриц позволяет получить следующий критерий равномерной глобальной достижимости двумерных линейных систем (9):

Теорема 3.3. [4] *Система* (9) *равномерно глобально достижима тогда и только тогда, когда найдется величина $\Delta > 0$, при которой для любых чисел $r \geqslant 1$ и $0 < \rho \leqslant 1$ существует такая величина $\theta = \theta(r,\rho) > 0$, что при всяком числе $t_0 \geqslant 0$ и произвольной матрице $H \in \mathcal{LR}_2(r,\rho)$ найдется измеримое и ограниченное на отрезке $[t_0, t_0 + \Delta]$ управление $U = U(t)$, удовлетворяющее при всех $t \in [t_0, t_0 + \Delta]$ оценке $\|U(t)\| \leqslant \theta$ и гарантирующее для матрицы Коши $X_U(t,s)$ системы* (9) *равенство $X_U(t_0 + \Delta, t_0) = H$.*

Обозначим через $\mathrm{L}_2 \subset \mathrm{M}_2$ совокупность всех нижнетреугольных 2×2-матриц с положительными диагональными элементами. Тогда для любых чисел $r \geqslant 1$ и $0 < \rho \leqslant 1$ через $\mathcal{L}_2(r,\rho)$ будем обозначать множество матриц $\mathcal{L}_2(r,\rho) := \{H \in \mathrm{L}_2 : \|H - E\| \leqslant r,\ \det H \geqslant \rho\}$. Будем, как и выше, считать $\mathcal{R}_2(r,\rho) := \{H \in \mathrm{R}_2 : \|H - E\| \leqslant r,\ \det H \geqslant \rho\}$, где $\mathrm{R}_2 \subset \mathrm{M}_2$ — совокупность всех верхнетреугольных 2×2-матриц с положительной диагональю.

А. А. Козловым[11] для системы (9) с нулевой матрицей A были получены достаточные условия ее равномерной глобальной достижимости во множестве $\mathcal{R}_2(r,\rho)$ верхнетреугольных 2×2-матриц. В разделе 3.2.2 диссертации доказывается аналогичный результат для нижнетреугольных 2×2-матриц:

Теорема 3.5. [4] *Пусть $A(t) \equiv 0$ при всех $t \geqslant 0$. Если система* (8) *равномерно вполне управляема, то найдется величина $\Delta = \Delta(\sigma) > 0$, при которой для любых чисел $r \geqslant 1$ и $0 < \rho \leqslant 1$ существует такая величина $\theta = \theta(r,\rho) > 0$, что при всяком числе $t_0 \geqslant 0$ и произвольной матрице*

$H \in \mathcal{L}_2(r,\rho)$ найдется такое измеримое и ограниченное матричное управление U, для которого при всех $t \in [t_0, t_0+\Delta]$ выполняется неравенство $\|U(t)\| \leqslant \theta$ и которое обеспечивает для матрицы Коши $X_U(t,s)$, $t, s \geqslant 0$, системы (9) *с этим управлением равенство $X_U(t_0+\Delta, t_0) = H$.*

В силу этой теоремы, вышеуказанного результата А. А. Козлова, а также полученного критерия равномерной глобальной достижимости (теорема 3.3), имеют место достаточные условия равномерной глобальной достижимости линейной нестационарной дифференциальной системы (9) с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами при условии нулевой матрицы A.

Теорема 3.6. [4] *Пусть $A(t) \equiv 0$ при всех $t \geqslant 0$. Если линейная система* (8) *с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами равномерно вполне управляема, то соответствующая замкнутая система* (9) *обладает свойством равномерной глобальной достижимости.*

На основании этой теоремы, а также следствия 2.4 получены достаточные условия равномерной глобальной достижимости двумерной линейной системы (9) с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами.

Теорема 3.7. [4, 17] *Если линейная система* (8) *с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами равномерно вполне управляема, то замкнутая система* (9) *равномерно глобально достижима.*

Доказательство данного утверждения состоит в построении необходимого управления U в виде суммы двух управляющих воздействий, первое из которых, в силу справедливости следствия 2.4, обеспечивает асимптотическую эквивалентность системы (9) с этим управлением системе с нулевой матрицей при векторе ее состояния, второе же управление, ввиду выполнения условий теоремы 3.6, обеспечивает перевод матрицы Коши последней системы, замкнутой таким управлением, из единичной в наперед заданную допустимую матрицу.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные результаты диссертации.

В диссертации проведено исследование условий глобальной ляпуновской приводимости и равномерной глобальной достижимости линейных нестационарных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами. Получены следующие основные результаты:

— даны доказательства пропорциональной глобальной управляемости верхнего особого (генерального) показателя Боля, глобальной управляемости коэффициентов неправильности Ляпунова, Перрона и Гробмана, свойств правильности и приводимости, а также равномерной стабилизируемости и глобальной скаляризуемости для двумерных линейных равномерно вполне управляемых систем с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами, которые основаны на введенном понятии равномерной глобальной квазидостижимости линейной дифференциальной системы [1, 3, 5, 7, 8, 10, 12, 15, 16];

— установлена глобальная ляпуновская приводимость двумерных линейных равномерно вполне управляемых (по Тонкову) систем с локально суммируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами [2, 6, 11, 13, 14];

— получены достаточные условия равномерной глобальной достижимости двумерных линейных нестационарных дифференциальных систем с локально интегрируемой и интегрально ограниченной матрицей коэффициентов [4, 9, 17].

Рекомендации по практическому использованию результатов.

Диссертация носит теоретический характер. Результаты и методы исследования могут быть использованы для решения задач теории устойчивости и управляемости нестационарных линейных систем. Они также могут найти применение при чтении спецкурсов по теории характеристических показателей Ляпунова и теории управления асимптотическими инвариантами линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ

Статьи в научных журналах

1. *Инц, И. В.* Глобальная управляемость отдельных асимптотических инвариантов двумерных линейных систем с локально интегрируемыми коэффициентами / И. В. Инц, А. А. Козлов, А. Д. Бурак // Молодежь в науке-2013: прил. к журналу «Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі». В 5 ч. Ч.2. Серия физ.-мат. наук; сер. физ.-тех. наук. — С. 37 – 45.
2. *Инц, И. В.* О глобальной ляпуновской приводимости двумерных линейных систем с локально интегрируемыми коэффициентами / И. В. Инц, А. А. Козлов // Дифференц. уравнения. — 2016. — Т. 52, № 6. — С. 720 – 742.
3. *Инц, И. В.* О достаточном условии равномерной стабилизируемости двумерных линейных управляемых систем с локально интегрируемыми коэффициентами / И. В. Инц, А. А. Козлов // Веснік ВДЎ. — 2017. — № 1(94). — С. 14–19.
4. *Инц, И. В.* О равномерной глобальной достижимости двумерных линейных систем с локально интегрируемыми коэффициентами / И. В. Инц, А. А. Козлов // Вестник Удмуртского ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2017. — Т. 27. Вып. 2. — С. 178 – 192.

Статьи в сборниках материалов конференций

5. *Инц, И. В.* Глобальное управление отдельными асимптотическими инвариантами линейных систем с локально интегрируемыми коэффициентами /И. В. Инц, А. А. Козлов, А. Д. Бурак // «Молодежь в науке-2013»: материалы Междунар. научн. конф. молодых ученых (Минск, 19 – 22 ноября 2013 г.) / НАН Беларуси, 2013 г. [Электронный ресурс]. — Электрон., текст. дан. — Минск: НАН Беларуси, 2013. — С. 668 – 672. — 1 электрон. опт. диск (CD-ROM).
6. *Инц, И. В.* About the global controllability of full set of the asymptotic invariants linear systems / I. V. Ints, A. A. Kozlov // Міжнар. наук. конф. «Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів»: матеріали Міжнар. наук. конф. (м. Рівно, Україна, 19 – 22 лютого 2015 р.). — Рівне: РВВ РДГУ, 2015. — С. 223.
7. *Инц, И. В.* On the property of partial uniform global attainability of linear control / I. V. Ints, A. A. Kozlov // «European and national dimension in research»: материалы VII Междунар. конф. молодых учёных (Polotsk, 29 – 30 April 2015 year). — Part 3. — Novopolotsk: PSU, 2015. — P. 142 – 144.

8. *Инц, И. В.* О свойстве частичной равномерной глобальной достижимости линейных управляемых систем / И. В. Инц, А. А. Козлов // «Актуальные задачи математического моделирования и информационных технологий»: материалы Междунар. научн.-практич. конф., г. Сочи, 15 – 24 мая 2015 г., Соч. гос. ун-т; науч. ред.: Ю. И. Дрейзис, И. Л. Макарова, А. Р. Симонян, Е. И. Улитина. — Сочи, 2015. — С. 49 – 53.
9. *Инц, И. В.* Свойство равномерной глобальной достижимости двумерных линейных управляемых систем / И. В. Инц // Междунар. матем. конф. «Шестые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям»: материалы Междунар. научн. конф. Минск, 7-10 декабря 2015 г. — Часть 2. — Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси, 2015. — С. 20 – 21.
10. *Инц, И. В.* О достаточном условии равномерной глобальной квазидостижимости трёхмерных дифференциальных систем / И. В. Инц, А. А. Козлов // XII Белорусская математическая конференция: материалы Междунар. науч.конф., Минск, 5 – 10 сентября 2016 г. — Часть 2. — Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси, 2016. — С. 102 – 103.

Публикации докладов и тезисов докладов в научных журналах

11. *Инц, И. В.* Глобальная ляпуновская приводимость и равномерная глобальная квазидостижимость линейных управляемых систем / И. В. Инц, А. А. Козлов // «Колмогоровские чтения. Общие проблемы управления и их приложения. Проблемы преподавания математики» (ОПУ-2015): материалы Междунар. конф., ТГУ, Тамбов, 8 – 12 октября 2015 г. / Вестник Тамбовского ун-та. — 2015. — Т. 20. Вып. 5. — С. 1187 – 1190.

Публикации в сборниках тезисов докладов научных конференций

12. *Инц, И. В.* Равномерная стабилизируемость и глобальная скаляризуемость двумерных равномерно вполне управляемых систем с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами / И. В. Инц, А. А. Козлов // XVI Междунар. научн. конф. по дифференц. уравнениям («ЕРУГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ-2014»): тез. докл. Междунар. научн. конф., Новополоцк, 19 – 22 мая 2014 г. — Часть 1. — Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси, 2014. — С. 93 – 94.
13. *Инц, И. В.* Глобальное управление полной совокупностью асимптотических инвариантов двумерных линейных систем с локально интегрируемыми коэффициентами / И. В. Инц, А. А. Козлов // XII Междунар. научн.-техн. конф. «Наука — образованию, производству, экономике»:

тез. докл. Междунар. научн.-техн. конф., Минск, 19 – 22 июня 2014 г. — Мн.: БНТУ, 2014. — С. 383 – 384.

14. *Инц, И. В.* Глобальная ляпуновская приводимость двумерных быстро осциллирующих систем / И. В. Инц, А. А. Козлов // «Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование»: тез. докл. Междунар. научн. конф., Дивноморское, 7 – 13 сентября 2014 г. — Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2014. — С. 116 – 117.

15. *Инц, И. В.* О мультипликативном представлении матрицы Коши трехмерной линейной равномерно вполне управляемой системы / И. В. Инц // «Молодежь в науке-2014»: тез. докл. Междунар. научн. конф. молодых ученых, Минск, 18 – 21 ноября 2014 г. / НАН Беларуси, 2014 г. [Электронный ресурс]. — Электрон., текст. дан. — Минск: НАН Беларуси, 2014. — С. 220. — 1 электрон. опт. диск (CD-ROM).

16. *Инц, И. В.* Глобальная управляемость отдельных асимптотических инвариантов трёхмерных линейных систем с локально интегрируемыми коэффициентами / И. В. Инц, А. А. Козлов // Теория управления и математическое моделирование: тез. докл. Всеросс. конф. с междунар. участием, посвящ. памяти проф. Н. В. Азбелева и проф. Е. Л. Тонкова, Ижевск, 9 – 11 июня 2015 г. — Ижевск: Изд-во Удмуртский ун-т, 2015. — С. 169 – 171.

17. *Инц, И. В.* О равномерной глобальной достижимости двумерных линейных управляемых систем / И. В. Инц, А. А. Козлов // Международная конференция по математической теории управления и механике: тез. докл. Междунар. научн. конф., Суздаль, 2 – 7 июля 2015 г. — М.: МИАН. — С. 65 – 66.

РЭЗЮМЭ

Інц Ірына Віктараўна

Глабальная ляпуноўская прывадзімасць лінейных дыферэнцыяльных сістэм з лакальна інтэгруемымі і інтэгральна абмежаванымі каэфіцыентамі

Ключавыя словы: лінейныя кіруемыя сістэмы, раўнамерная поўная кіруемасць, глабальнае кіраванне асімптатычнымі інварыянтамі, глабальная ляпуноўская прывадзімасць, раўнамерная глабальная дасягальнасць.

Аб'ект даследавання — лінейныя нестацыянарныя кіруемыя сістэмы звычайных дыферэнцыяльных ураўненняў. Прадметам даследавання з'яўляюцца ўласцівасці кіруемасці асімптатычных інварыянтаў такіх сістэм.

Асноўная мэта дысертацыі заключаецца ў знаходжанні для двумернай лінейнай нестацыянарнай сістэмы з лакальна інтэгруемымі і інтэгральна абмежаванымі каэфіцыентамі дастатковых умоў глабальнай кіруемасці яе асобных асімптатычных інварыянтаў (за выключэннем характарыстычных паказчыкаў Ляпунова), а таксама яе глабальнай ляпуноўскай прывадзімасці і раўнамернай глабальнай дасягальнасці.

Даследаванні праводзяцца з выкарыстаннем метадаў матэматычнай тэорыі кіравання, матрычнага аналізу, тэорыі паказчыкаў Ляпунова, а таксама тэорыі кіравання асімптатычнымі інварыянтамі лінейных сістэм.

Даказаны глабальная кіруемасць уласцівасцяў правільнасці і прывадзімасці, каэфіцыентаў Ляпунова, Перона, Гробмана, прапарцыйная глабальная кіруемасць верхняга асаблівага (генеральнага) паказчыка Боля, а таксама раўнамерная стабілізуемасць і глабальная скалярызуемасць для двумерных лінейных раўнамерна цалкам кіруемых (па Танкову) сістэм з лакальна інтэгруемымі і інтэгральна абмежаванымі каэфіцыентамі. Атрыманы дастатковыя ўмовы глабальнай ляпуноўскай прывадзімасці і раўнамернай глабальнай дасягальнасці такіх сістэм.

Усе вынікі дысертацыйнай работы з'яўляюцца новымі, раней невядомымі. Яны маюць тэарэтычны характар і могуць быць выкарыстаны пры рашэнні задач тэорыі ўстойлівасці і кіруемасці лінейных сістэм, а таксама пры чытанні спецкурсаў па тэорыі характарыстычных паказчыкаў Ляпунова і тэорыі кіравання асімптатычнымі інварыянтамі лінейных нестацыянарных сістэм звычайных дыферэнцыяльных ураўненняў.

РЕЗЮМЕ

Инц Ирина Викторовна

Глобальная ляпуновская приводимость линейных дифференциальных систем с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами

Ключевые слова: линейные управляемые системы, равномерная полная управляемость, глобальное управление асимптотическими инвариантами, глобальная ляпуновская приводимость, равномерная глобальная достижимость.

Объект исследования — линейные нестационарные управляемые системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Предметом исследования являются свойства управляемости асимптотических инвариантов таких систем.

Основная цель диссертации состоит в нахождении для двумерной линейной нестационарной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами достаточных условий глобальной управляемости ее отдельных асимптотических инвариантов (за исключением характеристических показателей Ляпунова), а также ее глобальной ляпуновской приводимости и равномерной глобальной достижимости.

Исследования проводятся с использованием методов математической теории управления, матричного анализа, теории показателей Ляпунова, а также теории управления асимптотическими инвариантами линейных систем.

Доказаны глобальная управляемость свойств правильности и приводимости, коэффициентов неправильности Ляпунова, Перрона и Гробмана, пропорциональная глобальная управляемость верхнего особого (генерального) показателя Боля, а также равномерная стабилизируемость и глобальная скаляризуемость для двумерных линейных равномерно вполне управляемых (по Тонкову) систем с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами. Получены достаточные условия глобальной ляпуновской приводимости и равномерной глобальной достижимости таких систем.

Все результаты диссертации являются новыми, ранее неизвестными. Они носят теоретический характер и могут быть использованы для решения задач теории устойчивости и управляемости линейных систем, а также при чтении спецкурсов по теории характеристических показателей Ляпунова и теории управления асимптотическими инвариантами линейных нестационарных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

SUMMARY

Ints Irina Viktorovna

Global Lyapunov reducibility of linear differential systems with local integrable and integrally bounded coefficients

Keywords: linear controllable systems, uniform complete controllability, global control over asymptotical invariants, global Lyapunov reducibility, uniform global attainability.

The object of the investigation is linear time-dependent controllable systems of ordinary differential equations. The subject of the investigation is properties of controllability of asymptotical invariants of these systems.

The main goal of the research is to find the sufficient conditions of controllability of particular asymptotical invariants (except Lyapunov characteristic exponents) of two-dimensional linear time-dependent system of ordinary differential equations with local integrable and integrally bounded coefficients, also the sufficient conditions of its global Lyapunov reducibility and uniform global attainability.

The research is carried out using methods of mathematical theory of control, matrix analysis, Lyapunov exponents theory and theory of control over asymptotical invariants.

Global controllability of properties of correctness and reducibility, coefficients of Lyapunov, Perron, Grobman, proportional global controllability of top special (general) Bohl exponent, also uniform stabilizability and global scalarizability were proved for two-dimensional linear uniformly completely controllable (by Tonkov) systems with local integrable and integrally bounded coefficients. Sufficient conditions of global Lyapunov reducibility and uniform global attainability of such systems were received.

All the results of the thesis are new, previously unknown. They have theoretical style and may be applied for solving the problems of theory of stability and controllability of linear systems and for giving lectures on special courses on the Lyapunov characteristic exponents theory and on the theory of control over asymptotical invariants of linear time-dependent systems of ordinary differential equations.

Подписано в печать 16 мая 2019 г.
Формат $60 \times 84/16$.
Усл. печ.л. 1,5. Учетн. изд. л. 1,4.
Тираж 60 экз. Заказ № 5.

Отпечатано на ризографе Института математики НАН Беларуси.
Издатель и полиграфическое исполнение:
Институт математики НАН Беларуси.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/257 от 2 апреля 2014 г.
220072, Минск, Сурганова, 11.