

Учреждение образования
«Белорусский государственный университет транспорта»

УДК 539.3

ЗЕЛЕНАЯ
Анастасия Сергеевна

**ДЕФОРМИРОВАНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ
ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ ТРЕХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН
СО СЖИМАЕМЫМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ
В ТЕМПЕРАТУРНОМ ПОЛЕ**

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

по специальности
01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

Гомель, 2019

Работа выполнена в Учреждении образования «Белорусский государственный университет транспорта»

Научный руководитель – **Леоненко Денис Владимирович**, доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры «Строительная механика» учреждения образования «Белорусский государственный университет транспорта»

Официальные оппоненты – **Шимановский Александр Олегович**, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Техническая физика и теоретическая механика» учреждения образования «Белорусский государственный университет транспорта»;

Марьина Наталья Александровна, кандидат физико-математических наук, доцент, инженер-программист отдела обеспечения функционирования Процессингового центра ПУ «Связьинформсервис» РУП «ПО«Белоруснефть»

Оппонирующая организация – Белорусский национальный технический университет

Защита состоится 11 октября 2019 г. в 14-00 на заседании совета по защите диссертаций К 02.27.01 при Учреждении образования «Белорусский государственный университет транспорта» по адресу: 246653, г. Гомель, ул. Кирова, 34, ауд. 103, e-mail: smech@tut.by, телефон ученого секретаря совета (232) 95-39-61.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Учреждения образования «Белорусский государственный университет транспорта».

Автореферат разослан « 09 » сентября 2019 г.

И. о. ученого секретаря совета
по защите диссертаций
доктор физ.-мат. наук, профессор



А.В. Яровая

© Зеленая А.С., 2019

ВВЕДЕНИЕ

К современным конструкциям, которые используются в промышленности и строительстве, повышаются требования по прочности и весу, поэтому широкое распространение получили многослойные конструкции, частным случаем которых являются трехслойные элементы конструкций. Трехслойные элементы при рациональном сочетании материалов с различными свойствами становятся способными сопротивляться многообразным внешним воздействиям и позволяют сократить расходы в период эксплуатации. Вместе с тем, требования, которые предъявляются к ним в процессе разработки, становятся все более жесткими, так как в процессе эксплуатации, кроме силовых воздействий, они подвергаются также и воздействию температуры. В связи с этим возникает необходимость разработки новых и уточнения уже существующих методов их расчета.

Свои истоки теория слоистых элементов конструкций берет в конце 40-х годов XX века, так как именно в это время изданы первые работы по механике многослойных конструкций.

В развитии теории слоистых конструкций значительный вклад принадлежит отечественным и зарубежным ученым (А. Я. Александров, В. В. Болотин, К. З. Галимов, А. Г. Горшков, Э. И. Григолюк, В. И. Королев, Л. М. Куршин, Д. В. Леоненко, Х. М. Муштари, Ю. Н. Новичков, Э. И. Старовойтов, А. П. Чулков, А. В. Яровая, М. Р. Bieniek, А. М. Freudenthal, J. K. Ebsioglu, A. C. Eringen, J. I. Foss, L. M. Nabip, W. S. Plantemma, E. Reissner, J. Solvey и др.).

На сегодняшний день известно большое количество моделей трехслойных конструкций, построенных на различных гипотезах. Однако следует отметить, что деформирование трехслойных прямоугольных пластин рассматривалось, как правило, с несжимаемым заполнителем в линейной постановке без учета температурного воздействия.

Задачи, решенные в диссертации, ранее не рассматривались ввиду их тематической сложности. В связи с этим тема исследований является актуальной.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Связь работы с научными программами (проектами), темами

Тема диссертации соответствует п. 12 «Междисциплинарные исследования» перечня направлений научных исследований Республики Беларусь на 2016 – 2020 годы (утверждено Постановлением Совета Министров Республики Беларусь от 12.03.2015 № 190).

Работа входит составной частью в

- ГПНИ «Механика, металлургия, диагностика в машиностроении». Задание 1.40 «Развитие численных и аналитических методов исследования прочности, жесткости и устойчивости несущих транспортных и машиностроитель-

ных конструкций при комплексных воздействиях с целью повышения надежности и снижения материалоемкости», № ГР 20172069, 01.07.2017– 31.12.2019;

- ГБТ «Исследование процессов деформирования неоднородных систем» (01.01.2017– 31.12.2021), выполняемую на кафедре «Строительная механика» Белорусского государственного университета транспорта.

Цель и задачи исследования

Целью исследования является разработка и анализ механико-математических моделей деформирования физически линейных и физически нелинейных трехслойных прямоугольных пластин со сжимаемым заполнителем при действии комплексных термосиловых нагрузок.

Для ее достижения потребовалось решить следующие *задачи*:

- осуществить постановку краевых задач о деформировании физически линейных и нелинейных прямоугольных трехслойных пластин с учетом температуры в физических уравнениях состояния;

- получить аналитические решения краевых задач термоупругости и термоупругопластичности, содержащие формулы для расчета перемещений, внутренних усилий, деформаций и напряжений в прямоугольных трехслойных пластинах при действии распределенных нагрузок общего вида, а также для различных условий закрепления контура пластины;

- провести численный параметрический анализ напряженно-деформированного состояния физически линейных и нелинейных прямоугольных трехслойных пластин при термосиловых нагружениях в зависимости от геометрических и упругих параметров слоев, внешней нагрузки и температуры.

Научная новизна

Впервые разработаны механико-математические модели квазистатического деформирования физически линейных и физически нелинейных трехслойных прямоугольных пластин, получены новые аналитические и численные решения соответствующих краевых задач, отличающиеся учетом сжимаемости заполнителя и влиянием температуры на напряженно-деформированное состояние материалов слоев.

Положения, выносимые на защиту

- механико-математические модели физически линейного и нелинейного деформирования трехслойных прямоугольных пластин, в том числе при цилиндрическом изгибе, включающие уравнения равновесия в усилиях и перемещениях, формулировки граничных условий, отличающиеся учетом сжимаемости заполнителя, а также учитывающие температуру в физических уравнениях состояния;

- аналитические решения краевых задач линейной упругости для прямоугольных трехслойных пластин со сжимаемым заполнителем, содержащие формулы для расчета перемещений, внутренних усилий, деформаций и напряжений в случае свободного опирания контура пластины на жесткие неподвижные опоры и жесткого защемления контура при действии термосиловых нагрузок;

- итерационные аналитические решения краевых задач деформационной теории пластичности об изгибе прямоугольных трехслойных пластин со сжимаемым заполнителем при изотермических и термосиловых нагрузках;
- численный параметрический анализ напряженно-деформированного состояния физически линейных и нелинейных прямоугольных трехслойных пластин при изотермических и термосиловых нагружениях, установивший зависимости перемещений, деформаций и напряжений от геометрических и упругих параметров слоев, величин внешней нагрузки.

Личный вклад соискателя ученой степени

Все основные результаты, выносимые на защиту, получены автором лично. Научный руководитель принимал участие в выборе направлений исследования и в обсуждении полученных результатов. Также совместно с научным руководителем опубликовано две статьи [4-А, 5-А], при написании которых сообща обсуждались полученные численные и аналитические результаты.

Апробация диссертации и информация об использовании ее результатов

Основные результаты работы докладывались и получили одобрение на:

- V, VI и VII Международных научно-практических семинарах «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы» (Москва, 2016, 2017, 2018);
- VIII Международной научно-практической конференции «Проблемы безопасности на транспорте» (Гомель, 2017);
- IV и V Международных научно-технических конференциях «Моделирование и инжиниринг механических и мехатронных систем» (Минск, 2018, 2019);
- XXIII, XXIV и XXV Международных симпозиумах «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова (Москва, 2017, 2018, 2019);
- XX, XXI и XXII Республиканских научных конференциях «Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях» (Гомель, 2017, 2018, 2019);
- VI Международной научно-практической конференции «Строительство и восстановление искусственных сооружений» (Гомель, 2018);
- VI Международной научно-практической конференции, посвященной 65-летию БИИЖТа-БелГУТа «Актуальные вопросы и перспективы развития транспортного и строительного комплексов» (Гомель, 2018);
- VIII Республиканской конференции студентов, магистрантов и аспирантов «Актуальные вопросы физики и техники» (Гомель, 2019).

Результаты диссертации могут быть использованы в строительстве в расчетной практике предприятия комплексного проектирования «Гомельдорпроект» КПРСУП «Гомельоблдорстрой» и машиностроении в НТЦК ОАО «Гомсельмаш».

Опубликование результатов диссертации

По теме диссертации опубликовано 22 работы, в том числе 8 статей в научных изданиях, включенных в перечень ВАК, 1 статья в научном рецензируемом журнале, 10 материалов конференций, 3 тезисов докладов, общим объемом 8,0 авторских листов.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, общей характеристики работы, четырех глав, заключения, библиографического списка, приложения. Объем диссертации составляет 141 страницу машинописного текста, список использованных источников из 143 наименований на 11 страницах, список публикаций автора из 22 наименований на 4 страницах, приложение на 2 страницах.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

В первой главе приведены основные физические гипотезы однослойных и слоистых конструкций. Рассмотрены публикации по исследованию квазистатического деформирования как однородных элементов, так и элементов конструкций, состоящих из нескольких различных слоев. Слоистые конструкции рассматриваются многими авторами, и многие проблемы квазистатического деформирования на данный момент уже решены, что позволило получить достаточно широкое представление об исследованиях в этой области за последние годы. Однако публикаций по исследованию конструкций, которые в процессе деформирования проявляют физически нелинейные свойства под действием термостатических нагрузок было обнаружено в достаточно меньшей степени. К подобным неисследованным проблемам относится краевая задача о деформировании прямоугольной физически нелинейной трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем в температурном поле, которой и посвящена данная работа.

Для решения задачи термоупругопластичности и отработки алгоритмов необходимо предварительно решить задачи в упругой и упругопластической постановках. Для этого последовательно рассмотрим эти задачи.

Во второй главе рассмотрено деформирование прямоугольной упругой трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем, приведена постановка краевой задачи в усилиях и перемещениях, выполнен численный анализ полученных решений.

За искомые функции принимаются продольные перемещения $u_{kx}(x, y)$, $u_{ky}(x, y)$ и прогибы $w_k(x, y)$ срединных поверхностей несущих слоев ($k=1, 2$).

Уравнения равновесия рассматриваемой трехслойной пластины получим, используя вариационный принцип Лагранжа

$$\delta A = \delta W, \quad (1)$$

где δA , δW – вариации работы внешних и внутренних сил.

Вариация работы внешней поверхностной нагрузки

$$\delta A = \iint_S \left(p_x (\delta u_{1,x} - \frac{h_1}{2} \delta w_{1,x}) + p_y (\delta u_{1,y} - \frac{h_1}{2} \delta w_{1,y}) + q \delta w_1 \right) dx dy. \quad (2)$$

Здесь запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

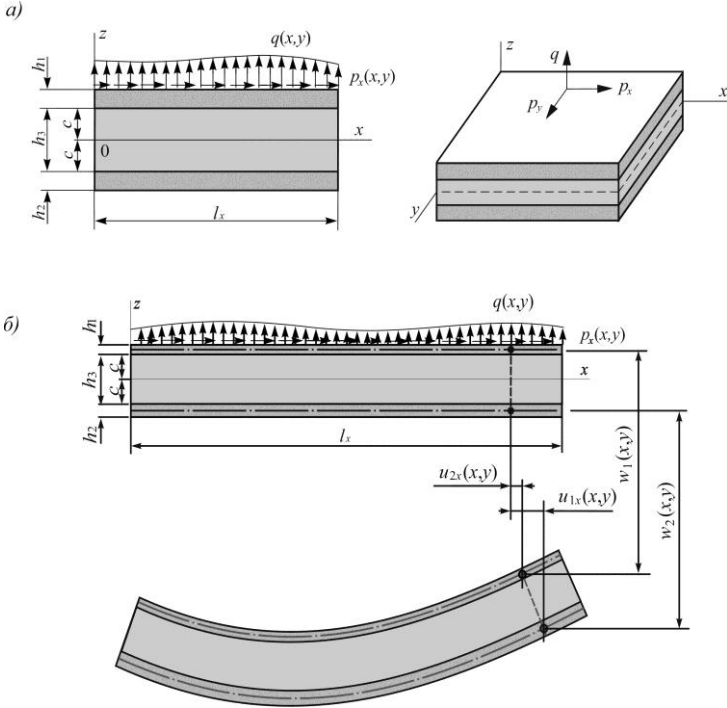


Рисунок 1. – Расчетная схема трехслойной пластины

Вариация работы внутренних сил упругости

$$\begin{aligned} \delta W = & \iint_S \left\{ \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} (\sigma_{xx}^{(k)} \delta \varepsilon_{xx}^{(k)} + \sigma_{yy}^{(k)} \delta \varepsilon_{yy}^{(k)} + 2\sigma_{xy}^{(k)} \delta \varepsilon_{xy}^{(k)}) dz + \right. \\ & \left. + 2 \int_{h_3} (\sigma_{xz}^{(3)} \delta \varepsilon_{xz}^{(3)} + \sigma_{yz}^{(3)} \delta \varepsilon_{yz}^{(3)} + \sigma_{zz}^{(3)} \delta \varepsilon_{zz}^{(3)}) dz \right\} dx dy. \quad (3) \end{aligned}$$

Подставив (3), (2) в (1), а также используя выражения для перемещений, была получена система шести дифференциальных уравнений равновесия пластины в усилиях:

$$\begin{aligned} H_{1x} - V_{1,y} - P_{1x,x} &= p_x, & H_{1x} + V_{2,y} + P_{2x,x} &= 0, \\ H_{1y} - V_{1,x} - P_{1y,y} &= p_y, & H_{1y} + V_{2,x} + P_{2y,y} &= 0, \\ S_{1x,x} + H_2 - T_{1x,x} - U_{1,y} + S_{1y,y} - T_{1y,y} &= q + 0,5 p_{x,x} h_1 + 0,5 p_{y,y} h_1, \end{aligned}$$

$$S_{2x,xx} - H_2 - T_{2x,x} - U_{2,xy} + S_{2y,yy} - T_{2y,y} = 0, \quad (4)$$

где $H_{kx}, H_{ky}, V_k, P_{kx}, P_{ky}, S_{kx}, S_{ky}, H_k, T_{kx}, T_{ky}, U_k$ – обобщенные усилия.

В слоях рассматриваемой пластины для связи тензоров напряжений и деформаций используется соотношение закона Гука в девиаторно-шаровой форме:

$$s_{ij}^{(k)} = 2G_k \varepsilon_{ij}^{(k)}, \quad \sigma^{(k)} = 3K_k \varepsilon^{(k)} \quad (i, j = x, y, z, k = 1, 2, 3), \quad (5)$$

где $s_{ij}^{(k)}, \sigma^{(k)}$ – девиаторная и шаровая части тензора напряжений, Па;

$\varepsilon_{ij}^{(k)}, \varepsilon^{(k)}$ – девиаторная и шаровая части тензора деформаций;

G_k, K_k – сдвиговой и объемный модули упругости материалов, Па.

Применив соотношения закона Гука (5), выразим внутренние усилия и моменты через искомые функции $u_{1x}, u_{2x}, u_{1y}, u_{2y}, w_1, w_2$. Подставив полученные выражения в систему уравнений равновесия (4), получим систему дифференциальных уравнений, описывающих перемещения в упругой трехслойной пластине со сжимаемым наполнителем:

$$\begin{aligned} & a_1 u_{1x} - a_1 u_{2x} - a_4 u_{1x,xx} - a_5 u_{2x,xx} - a_9 u_{1x,yy} - a_{18} u_{2x,yy} - a_{21} u_{1y,xy} - a_{23} u_{2y,xy} + a_2 w_{1,x} + \\ & \quad + a_5 w_{2,x} - 2a_{24} w_{1,xyy} + a_{25} w_{2,xyy} - 2a_6 w_{1,xxx} + a_7 w_{2,xxx} = p_x, \\ & -a_1 u_{1x} + a_1 u_{2x} - a_5 u_{1x,xx} - a_9 u_{2x,xx} - a_{18} u_{1x,yy} - a_{20} u_{2x,yy} - a_{23} u_{1y,xy} - a_{22} u_{2y,xy} - a_{10} w_{1,x} - \\ & \quad - a_{17} w_{2,x} - a_{24} w_{1,xyy} + 2a_{25} w_{2,xyy} - a_6 w_{1,xxx} + 2a_7 w_{2,xxx} = 0, \\ & a_1 u_{1y} - a_1 u_{2y} - a_4 u_{1y,yy} - a_5 u_{2y,yy} - a_{19} u_{1y,xx} - a_{18} u_{2y,xx} - a_{21} u_{1x,xy} - a_{23} u_{2x,xy} + a_2 w_{1,y} + \\ & \quad + a_3 w_{2,y} - 2a_{24} w_{1,xyy} + a_{25} w_{2,xyy} - 2a_6 w_{1,yyy} + a_7 w_{2,yyy} = p_y, \\ & -a_1 u_{1y} + a_1 u_{2y} - a_5 u_{1y,yy} - a_9 u_{2y,yy} - a_{18} u_{1y,xx} - a_{20} u_{2y,xx} - a_{23} u_{1x,xy} - a_{22} u_{2x,xy} - a_{10} w_{1,y} - \\ & \quad - a_{17} w_{2,y} - a_{24} w_{1,xyy} + 2a_{25} w_{2,xyy} - a_6 w_{1,yyy} + 2a_7 w_{2,yyy} = 0, \\ & -a_2 u_{1x,xy} - a_2 u_{1y,y} + a_{10} u_{2x,x} + a_{10} u_{2y,y} + 2a_6 u_{1x,xxx} + a_6 u_{2x,xxx} + 2a_6 u_{1y,yyy} + a_6 u_{2y,yyy} + \\ & \quad + 2a_{24} u_{1x,xyy} + a_{24} u_{2x,xyy} + 2a_{24} u_{1y,xyy} + a_{24} u_{2y,xyy} + a_{11} w_{1,xx} + a_{11} w_{1,yy} - a_{12} w_{2,xx} - \\ & \quad - a_{12} w_{2,yy} + a_{15} w_{1,xxx} + a_{15} w_{1,yyy} - a_{16} w_{2,xxx} - a_{16} w_{2,yyy} + a_{26} w_{1,xyy} - a_{28} w_{2,xyy} + \\ & \quad + a_8 w_{1,x} - a_8 w_{2,x} = q + 0,5 p_{x,x} h_1 + 0,5 p_{y,y} h_1, \\ & -a_3 u_{1y,xy} - a_3 u_{1x,x} + a_{17} u_{2y,y} + a_{17} u_{2x,x} - a_7 u_{1y,yyy} - a_7 u_{1x,xxx} - 2a_7 u_{2y,yyy} - 2a_7 u_{2x,xxx} - \\ & -2a_{25} u_{2y,xyy} - a_{25} u_{1y,xyy} - 2a_{25} u_{2x,xyy} - a_{25} u_{1x,xyy} - a_{12} w_{1,xx} - a_{12} w_{1,yy} + a_{14} w_{2,xx} + a_{14} w_{2,yy} - \\ & \quad - a_{16} w_{1,xxx} - a_{16} w_{1,yyy} + a_{13} w_{2,xxx} + a_{13} w_{2,yyy} - a_{28} w_{1,xyy} + a_{27} w_{2,xyy} - \\ & \quad - a_8 w_{1,x} + a_8 w_{2,x} = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где a_i ($i = 1, \dots, 28$) – коэффициенты, выражаемые через объемный K_k и сдвиговой G_k модули упругости материалов, и геометрические параметры слоев пластины.

Краевая задача (6) об изгибе пластины замыкается добавлением граничных условий. Кинематические условия соответствующие свободному опира-

нию пластины по кромкам на неподвижные в пространстве жесткие опоры ($k = 1, 2$):

$$\begin{aligned} \text{при } x=0, l_x & \quad u_{kx, x} = u_{ky} = w_k = w_{k, xx} = 0; \\ \text{при } y=0, l_y & \quad u_{ky, y} = u_{kx} = w_k = w_{k, yy} = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

При жестком защемлении контура пластины ($k = 1, 2$):

$$\begin{aligned} \text{при } x=0, l_x & \quad u_{kx} = u_{ky} = w_k = w_{k, x} = 0; \\ \text{при } y=0, l_y & \quad u_{ky} = u_{kx} = w_k = w_{k, y} = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Система дифференциальных уравнений (6) является линейной. Решение получим методом Бубнова–Галеркина, который предполагает разложение искомых перемещений и внешних нагрузок в ряды по системам базисных функций:

$$\begin{aligned} u_{kx} &= \sum_{p,m=0}^{\infty} U_{kxpm} \Psi_{xpm}(x, y), \quad u_{ky} = \sum_{p,m=0}^{\infty} U_{kypm} \Psi_{ypm}(x, y), \quad w_k = \sum_{p,m=0}^{\infty} W_{kpm} \Psi_{zpm}(x, y), \\ P_x &= \sum_{p,m=0}^{\infty} P_{xpm} \Psi_{1pm}(x, y), \quad P_y = \sum_{p,m=0}^{\infty} P_{ypm} \Psi_{2pm}(x, y), \quad q = \sum_{p,m=0}^{\infty} q_{pm} \Psi_{3pm}(x, y), \end{aligned} \quad (9)$$

где $\Psi_{xpm}, \Psi_{ypm}, \Psi_{zpm}, \Psi_{lpm}$ – системы базисных ортогональных функций ($l = 1, 2, 3$),

$U_{1xpm}, U_{2xpm}, U_{1ypm}, U_{2ypm}, W_{1pm}, W_{2pm}$ – искомые амплитуды перемещений слоев прямоугольной трехслойной пластины,

P_{ypm}, P_{xpm}, q_{pm} – амплитуды нагрузок.

Путем выбора базисных функций $\Psi_{xpm}, \Psi_{ypm}, \Psi_{zpm}, \Psi_{lpm}$ должны удовлетворяться кинематические граничные условия (7) или (8).

После подстановки перемещений и нагрузок (9) в систему уравнений равновесия (6) и необходимых преобразований получим систему линейных алгебраических уравнений для определения искомых амплитуд перемещений $U_{1xpm}, U_{2xpm}, U_{1ypm}, U_{2ypm}, W_{1pm}, W_{2pm}$:

$$\begin{aligned} b_1 U_{1xpm} + b_2 U_{2xpm} + b_{11} U_{1ypm} + b_{12} U_{2ypm} + b_3 W_{1pm} + b_4 W_{2pm} &= P_{xpm}, \\ b_2 U_{1xpm} + b_5 U_{2xpm} + b_{12} U_{1ypm} + b_{13} U_{2ypm} + b_6 W_{1pm} + b_7 W_{2pm} &= 0, \\ b_{11} U_{1xpm} + b_{12} U_{2xpm} + b_{14} U_{1ypm} + b_{15} U_{2ypm} + b_{16} W_{1pm} + b_{17} W_{2pm} &= P_{ypm}, \\ b_{12} U_{1xpm} + b_{13} U_{2xpm} + b_{15} U_{1ypm} + b_{18} U_{2ypm} + b_{19} W_{1pm} + b_{20} W_{2pm} &= 0, \\ b_3 U_{1xpm} + b_6 U_{2xpm} + b_{16} U_{1ypm} + b_{19} U_{2ypm} + b_8 W_{1pm} + b_9 W_{2pm} &= q_{pm} + P_{xypm}, \\ b_4 U_{1xpm} + b_7 U_{2xpm} + b_{17} U_{1ypm} + b_{20} U_{2ypm} + b_9 W_{1pm} + b_{10} W_{2pm} &= 0, \end{aligned} \quad (10)$$

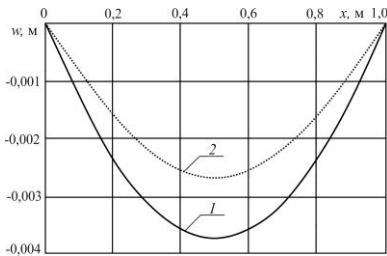
где b_i – коэффициенты, которые выражаются через величины a_i и зависят от параметров p и m .

Численные результаты получены для трехслойной пластины, состоящей из материалов Д16Т–фторопласт–Д16Т. Размеры пластины $l_x = 1$ м, $l_y = 1$ м. Исследование сходимости рядов (9) показало, что для вычисления перемещений можно ограничиться первыми 20 членами ряда. Для вычисления переме-

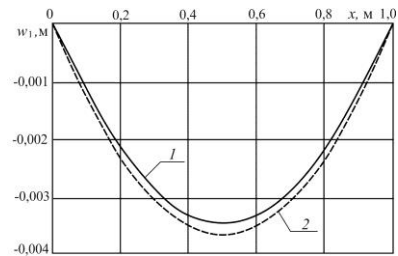
щений, деформаций и напряжений принималось не менее 100 членов ряда в зависимости от конкретных параметров нагружения.

На рисунке 2 показаны прогибы несущих слоев пластины w_i ($y = 0,5l_y$) вдоль оси x . Нагрузка равномерно распределена по всей поверхности пластины интенсивностью $q = -2$ МПа, толщины слоев $h_1 = 0,04$ м, $h_2 = 0,01$ м, $h_3 = 0,4$ м. Номер кривой совпадает с номером слоя. Здесь везде выполняется условие $|w_1| > |w_2|$, что соответствует обжатию заполнителя по всей площади пластины.

На рисунке 3 показан прогиб срединной плоскости пластины с несжимаемым заполнителем – кривая 1, а кривая 2 – при сжимаемом заполнителе, для симметричной пластины ($h_1 = 0,02$ м, $h_2 = 0,02$ м, $h_3 = 0,4$ м). Из рисунка видно, что максимальный прогиб срединной плоскости пластины со сжимаемым заполнителем больше, чем максимальный прогиб срединной плоскости пластины с несжимаемым заполнителем на 7,7%.

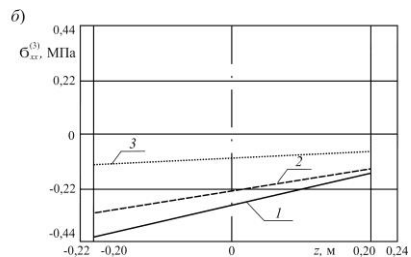
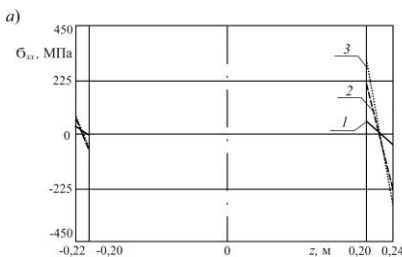


Номер кривой соответствует номеру слоя
Рисунок 2. – Прогибы слоев пластины



1 – пластина с несжимаемым заполнителем,
2 – пластина со сжимаемым заполнителем
Рисунок 3. – Прогибы срединных плоскостей

Распределение нормальных продольных напряжений σ_{xx} вдоль оси z ($x = 0,5l_x$, $y = 0,5l_y$) показано на рисунке 4 при различных материалах заполнителя: 1 – фторопласт, 2 – пенопласт, 3 – пенополиуретан. Нагрузка равномерно распределена по всей поверхности пластины интенсивностью $q = -1$ МПа, толщины слоев $h_1 = 0,04$ м, $h_2 = 0,02$ м, $h_3 = 0,4$ м.



1 – фторопласт, 2 – пенопласт, 3 – пенополиуретан
Рисунок 4. – Распределение нормальных напряжений по толщине пластины при изменении материала заполнителя в несущих слоях (а) и в заполнителе (б)

Из рисунка видно, что чем меньше механические характеристики материала заполнителя, тем больше нормальные напряжения в несущих слоях и меньше – в заполнителе. И, наоборот, при применении материала заполнителя с большими упругими механическими характеристиками наблюдается уменьшение нормальных напряжений в несущих слоях и рост соответствующих напряжений в заполнителе.

В третьей главе приведена постановка, получено аналитическое решение и проведено численное решение краевой задачи об изгибе *физически нелинейной* трехслойной прямоугольной пластины со *сжимаемым* заполнителем.

Рассматривается изгиб несимметричной по толщине трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем, несущие слои которой выполнены из упруго-пластического материала, а заполнитель – нелинейно упругий. Кинематика соответствует ранее принятой модели. В слоях пластины используются физические уравнения состояния, соответствующие теории малых упругопластических деформаций ($i, j = x, y, z, k = 1, 2, 3$):

$$s_{ij}^{(k)} = 2G_k \left(1 - \omega^{(k)}(\varepsilon_u^{(k)})\right) \varepsilon_{ij}^{(k)}, \quad \sigma^{(k)} = 3K_k \varepsilon^{(k)}, \quad (11)$$

где $\varepsilon_u^{(k)}$ – интенсивность деформации в k -м слое;

$\omega^{(k)}(\varepsilon_u^{(k)})$ – функции пластичности Ильюшина в несущих слоях;

$\omega^{(3)}(\varepsilon_u^{(3)})$ – универсальная функция, описывающая физическую нелинейность материала заполнителя.

В тензоре напряжений соотношения (11) выделим упругие (с индексом «0») и нелинейные (с индексом « ω ») слагаемые:

$$\sigma_{ij}^{(k)} = \sigma_{ij}^{(k)0} - \sigma_{ij}^{(k)\omega}, \quad \sigma_{ij}^{(k)0} = 2G_k \varepsilon_{ij}^{(k)} + 3K_k \varepsilon^{(k)} \delta_{ij}, \quad \sigma_{ij}^{(k)\omega} = 2G_k \omega^{(k)} \varepsilon_{ij}^{(k)}. \quad (12)$$

Выразим вариации деформаций и напряжения в (3) через искомые функции $u_{1x}, u_{2x}, u_{1y}, u_{2y}, w_1, w_2$ с помощью (11), (12). Проведем интегрирование по толщине слоев. Подставив полученное выражение в (1), имеем уравнения равновесия в перемещениях прямоугольной трехслойной пластины. Так как точное решение системы нелинейных дифференциальных уравнений получить не удалось, поэтому применим метод «упругих решений» А.А. Ильюшина. Данный метод позволяет сводить краевую задачу последовательно на каждом шаге приближения к соответствующей линейной задаче теории упругости с дополнительными «внешними» нагрузками. В итерационном виде система уравнений равновесия имеет вид:

$$\begin{aligned} & a_1 u_{1x}^n - a_1 u_{2x}^n - a_4 u_{1x}^n{}_{,xx} - a_5 u_{2x}^n{}_{,xx} - a_{19} u_{1x}^n{}_{,yy} - a_{18} u_{2x}^n{}_{,yy} - a_{21} u_{1y}^n{}_{,xy} - a_{23} u_{2y}^n{}_{,xy} + a_2 w_1^n{}_{,x} + \\ & + a_3 w_2^n{}_{,x} - 2a_{24} w_1^n{}_{,xyy} + a_{25} w_2^n{}_{,xyy} - 2a_6 w_1^n{}_{,xxx} + a_7 w_2^n{}_{,xxx} = p_x + p_\omega^{n-1}, \\ & -a_1 u_{1x}^n + a_1 u_{2x}^n - a_5 u_{1x}^n{}_{,xx} - a_9 u_{2x}^n{}_{,xx} - a_{18} u_{1x}^n{}_{,yy} - a_{20} u_{2x}^n{}_{,yy} - a_{23} u_{1y}^n{}_{,xy} - a_{22} u_{2y}^n{}_{,xy} - a_{10} w_1^n{}_{,x} - \\ & - a_{17} w_2^n{}_{,x} - a_{24} w_1^n{}_{,xyy} + 2a_{25} w_2^n{}_{,xyy} - a_6 w_1^n{}_{,xxx} + 2a_7 w_2^n{}_{,xxx} = s_\omega^{n-1}, \\ & a_1 u_{1y}^n - a_1 u_{2y}^n - a_4 u_{1y}^n{}_{,yy} - a_5 u_{2y}^n{}_{,yy} - a_{19} u_{1y}^n{}_{,xx} - a_{18} u_{2y}^n{}_{,xx} - a_{21} u_{1x}^n{}_{,xy} - a_{23} u_{2x}^n{}_{,xy} + a_2 w_1^n{}_{,y} + \\ & + a_3 w_2^n{}_{,y} - 2a_{24} w_1^n{}_{,xxy} + a_{25} w_2^n{}_{,xxy} - 2a_6 w_1^n{}_{,yyy} + a_7 w_2^n{}_{,yyy} = p_y + h_\omega^{n-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -a_1 u_{1y}^n + a_1 u_{2y}^n - a_5 u_{1y}^n{}_{,yy} - a_9 u_{2y}^n{}_{,yy} - a_{18} u_{1y}^n{}_{,xx} - a_{20} u_{2y}^n{}_{,xx} - a_{23} u_{1x}^n{}_{,xy} - a_{22} u_{2x}^n{}_{,xy} - a_{10} w_1^n{}_{,y} - \\
& \quad - a_{17} w_2^n{}_{,y} - a_{24} w_1^n{}_{,xy} + 2a_{25} w_2^n{}_{,xy} - a_6 w_1^n{}_{,yyy} + 2a_7 w_2^n{}_{,yyy} = r_\omega^{n-1}, \\
& -a_2 u_{1x}^n{}_{,x} - a_2 u_{1y}^n{}_{,y} + a_{10} u_{2x}^n{}_{,x} + a_{10} u_{2y}^n{}_{,y} + 2a_6 u_{1x}^n{}_{,xxx} + a_6 u_{2x}^n{}_{,xxx} + 2a_6 u_{1y}^n{}_{,yyy} + a_6 u_{2y}^n{}_{,yyy} + \\
& \quad + 2a_{24} u_{1x}^n{}_{,xyy} + a_{24} u_{2x}^n{}_{,xyy} + 2a_{24} u_{1y}^n{}_{,xxy} + a_{24} u_{2y}^n{}_{,xxy} + a_{11} w_1^n{}_{,x} + a_{11} w_1^n{}_{,y} - a_{12} w_2^n{}_{,xx} - \\
& \quad - a_{12} w_2^n{}_{,yy} + a_{15} w_1^n{}_{,xxx} + a_{15} w_1^n{}_{,yyy} - a_{16} w_2^n{}_{,xxx} - a_{16} w_2^n{}_{,yyy} + a_{26} w_1^n{}_{,xyy} - a_{28} w_2^n{}_{,xyy} + \\
& \quad + a_8 w_1^n - a_8 w_2^n = q + 0,5 p_x h_1 + 0,5 p_y h_1 + q_\omega^{n-1}, \\
& -a_3 u_{1y}^n{}_{,y} - a_3 u_{1x}^n{}_{,x} + a_{17} u_{2y}^n{}_{,y} + a_{17} u_{2x}^n{}_{,x} - a_7 u_{1y}^n{}_{,yyy} - a_7 u_{1x}^n{}_{,xxx} - 2a_7 u_{2y}^n{}_{,yyy} - 2a_7 u_{2x}^n{}_{,xxx} - \\
& \quad - 2a_{27} u_{2y}^n{}_{,xyy} - a_{25} u_{1y}^n{}_{,xyy} - 2a_{25} u_{2x}^n{}_{,xyy} - a_{25} u_{1x}^n{}_{,xyy} - a_{12} w_1^n{}_{,xx} - a_{12} w_1^n{}_{,yy} + a_{14} w_2^n{}_{,xx} + \\
& \quad + a_{14} w_2^n{}_{,yy} - a_{16} w_1^n{}_{,xxx} - a_{16} w_1^n{}_{,yyy} + a_{13} w_2^n{}_{,xxx} + a_{13} w_2^n{}_{,yyy} - a_{28} w_1^n{}_{,xyy} + a_{27} w_2^n{}_{,xyy} - \\
& \quad - a_8 w_1^n + a_8 w_2^n = g_\omega^{n-1}, \tag{13}
\end{aligned}$$

где n – номер приближения;

слагаемые с индексом “ ω ” включают все нелинейные добавки.

Применение сформулированного метода «упругих решений» позволяет сводить краевую задачу последовательно на каждом шаге приближения к соответствующей линейной задаче теории упругости с дополнительными «внешними» нагрузками.

Система дифференциальных уравнений (13) является нелинейной. На каждом шаге решение получим методом Бубнова–Галеркина, который предполагает разложение искомых перемещений и внешних нагрузок в ряды по системам базисных функций. Выражения для перемещений имеют вид ($k=1, 2$)

$$\begin{aligned}
u_{kx}^n &= \sum_{p,m=0}^{\infty} U_{kxpm}^n \Psi_{xpm}(x, y), \quad u_{ky}^n = \sum_{p,m=0}^{\infty} U_{kypm}^n \Psi_{ypm}(x, y), \\
w_k^n &= \sum_{p,m=0}^{\infty} W_{kpm}^n \Psi_{zpm}(x, y). \tag{14}
\end{aligned}$$

Внешние нагрузки выражаются следующим образом

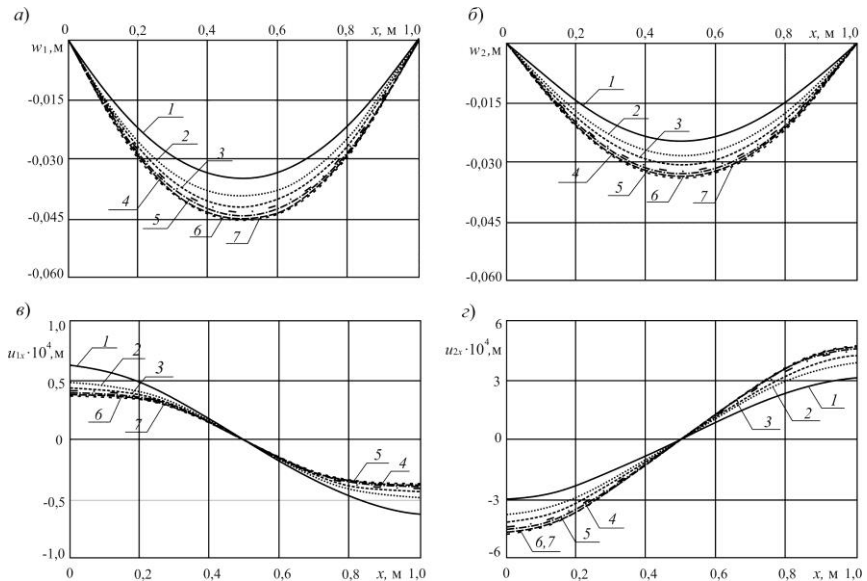
$$\begin{aligned}
P_\omega^{n-1} &= \sum_{p,m=0}^{\infty} P_{\omega p m}^{n-1} \Psi_{xpm}(x, y), \quad S_\omega^{n-1} = \sum_{p,m=0}^{\infty} S_{\omega p m}^{n-1} \Psi_{xpm}(x, y), \quad H_\omega^{n-1} = \sum_{p,m=0}^{\infty} H_{\omega p m}^{n-1} \Psi_{ypm}(x, y), \\
r_\omega^{n-1} &= \sum_{p,m=0}^{\infty} r_{\omega p m}^{n-1} \Psi_{ypm}(x, y), \quad q_\omega^{n-1} = \sum_{p,m=0}^{\infty} q_{\omega p m}^{n-1} \Psi_{zpm}(x, y), \quad g_\omega^{n-1} = \sum_{p,m=0}^{\infty} g_{\omega p m}^{n-1} \Psi_{zpm}(x, y), \\
P_x &= \sum_{p,m=0}^{\infty} P_{xpm} \Psi_{xpm}(x, y), \quad P_y = \sum_{p,m=0}^{\infty} P_{ypm} \Psi_{ypm}(x, y), \quad q = \sum_{p,m=0}^{\infty} q_{zpm} \Psi_{zpm}(x, y). \tag{15}
\end{aligned}$$

После подстановки перемещений (14), нагрузок и дополнительных усилий (15) в систему (13) получим следующую систему линейных алгебраических уравнений для нахождения искомых амплитуд перемещений U_{1xpm}^n , U_{2xpm}^n , U_{1ypm}^n , U_{2ypm}^n , W_{1pm}^n , W_{2pm}^n :

$$\begin{aligned}
b_1 U_{1xpm}^n + b_2 U_{2xpm}^n + b_{11} U_{1ypm}^n + b_{12} U_{2ypm}^n + b_3 W_{1pm}^n + b_4 W_{2pm}^n &= p_{\text{опт}}^{n-1} + p_{xpm}, \\
b_2 U_{1xpm}^n + b_5 U_{2xpm}^n + b_{12} U_{1ypm}^n + b_{13} U_{2ypm}^n + b_6 W_{1pm}^n + b_7 W_{2pm}^n &= s_{\text{опт}}^{n-1}, \\
b_{11} U_{1xpm}^n + b_{12} U_{2xpm}^n + b_{14} U_{1ypm}^n + b_{15} U_{2ypm}^n + b_{16} W_{1pm}^n + b_{17} W_{2pm}^n &= h_{\text{опт}}^{n-1} + p_{ypm}, \\
b_{12} U_{1xpm}^n + b_{13} U_{2xpm}^n + b_{15} U_{1ypm}^n + b_{18} U_{2ypm}^n + b_{19} W_{1pm}^n + b_{20} W_{2pm}^n &= r_{\text{опт}}^{n-1}, \\
b_3 U_{1xpm}^n + b_6 U_{2xpm}^n + b_{16} U_{1ypm}^n + b_{19} U_{2ypm}^n + b_8 W_{1pm}^n + b_9 W_{2pm}^n &= q_{pm} + p_{xypm} + d_{\text{опт}}^{n-1}, \\
b_4 U_{1xpm}^n + b_7 U_{2xpm}^n + b_{17} U_{1ypm}^n + b_{20} U_{2ypm}^n + b_9 W_{1pm}^n + b_{10} W_{2pm}^n &= g_{\text{опт}}^{n-1}. \quad (16)
\end{aligned}$$

Численная реализация решения проводилась для трехслойной пластины с материалами несущих слоев и заполнителя Д16Т–фторопласт–Д16Т. Размеры пластины: $l_x = 1$ м, $l_y = 1$ м, $h_1 = 0,04$ м, $h_2 = 0,02$ м, $h_3 = 0,4$ м. Граничные условия – свободное опирание пластины по контуру на неподвижные в пространстве жесткие опоры. Максимальные интенсивности деформаций не превышали трех пределов для несущих слоев и пяти пределов для заполнителя, поэтому можно считать, что деформации остаются в рамках теории малых упругопластических деформаций.

Рисунок 5 показывает процесс сходимости метода упругих решений на примере прогибов (а)–(б) и продольных перемещений первого (в) и второго (г) слоя при изгибе упругопластической пластины. Нагрузка с интенсивностью $q = -20$ МПа равномерно распределена по всей поверхности первого несущего слоя пластины. Номер кривой соответствует номеру итерации.



Номер кривой соответствует номеру итерации
Рисунок 5. – Сходимость метода «упругих» решений

Кривая 1 является решением упругой задачи. За искомое решение принято 7-е приближение, различие между кривыми 6 и 7 составляет 0,792 %, что менее 1%. При дальнейшем численном исследовании сходимости было обнаружено стремление к нулю разницы между предыдущей и последующей итерацией.

Из рисунков (а)–(б) следует, что упругопластический прогиб первого несущего слоя пластины больше упругого на 23%, второго – на 26%. Из рисунков (в)–(з) можно определить, что продольные перемещения первого несущего слоя уменьшаются на 64%, а продольные перемещения второго несущего слоя увеличиваются на 36%.

На рисунке 6 показаны области нелинейного деформирования в слоях пластины при нагрузке с интенсивностью $q = -8$ МПа. На опоре при $y=0$ (рисунок 6 (а)) область пластичности первого несущего слоя сосредоточена у границ пластины как у внешней поверхности, так и у склейки с заполнителем. Второй несущий слой также проявляет пластические свойства у границ пластины на внешней поверхности. Заполнитель проявляет физически нелинейные свойства в середине сечения, оставаясь упругим у границ пластины.

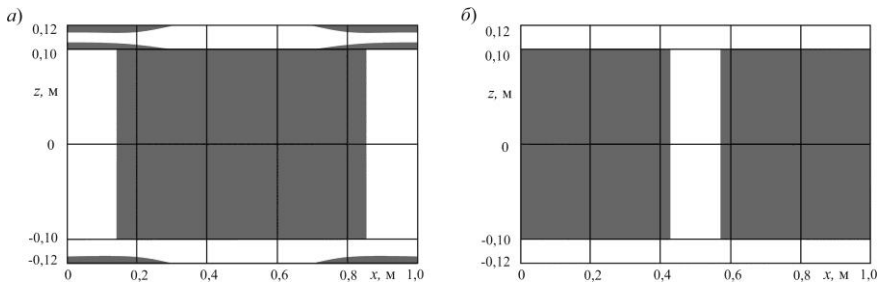
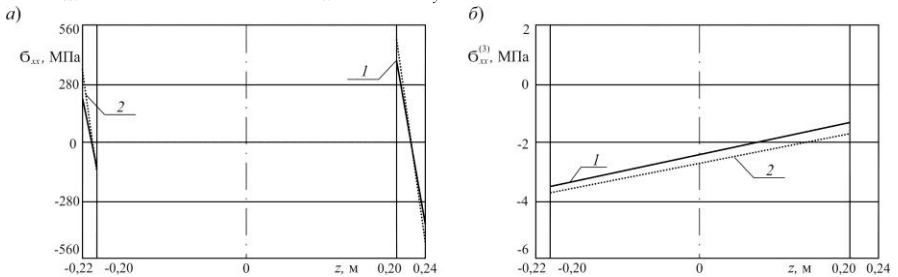


Рисунок 6. – Распределение областей пластичности и физической нелинейности

В середине пластины при $y=0,5l_y$ (рисунок 6 (б)) в несущих слоях пластичность не возникает. Области физической нелинейности распространяется на весь заполнитель, оставляя его середину упругой по всей высоте сечения.

На рисунке 7 представлено влияние пластичности и физической нелинейности материалов слоев на распределение нормальных продольных напряжений σ_{xx} вдоль оси z ($x=0,5l_x, y=0,5l_y$).



1 – упругая пластина, 2 – упругопластическая пластина

Рисунок 7. – Нормальные продольные напряжения в срединном поперечном сечении

Учет пластичности несущих слоев и физической нелинейности заполнителя приводит к увеличению напряжений в первом несущем слое на 15,7-21,3%, во втором несущем слое на внешней поверхности напряжения увеличиваются на 18,7% (рисунок 7 (а)). На рисунке 7 (б) напряжения в заполнителе остаются отрицательными, следовательно, заполнитель сжат по всей толщине пластины.

В четвертой главе выполнена постановка и решение задач *термоупруго-пластичности*, в том числе задачи *термоупругости*, а также задача цилиндрического изгиба упругопластической пластины в температурном поле.

Рассматривается изгиб в температурном поле несимметричной по толщине трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем, несущие слои которой выполнены из упругопластического материала, а заполнитель – нелинейно упругий. В слоях пластины используются физические уравнения состояния, соответствующие теории малых упругопластических деформаций с учетом температуры ($i, j = x, y, z, k = 1, 2, 3$):

$$s_{ij}^{(k)} = 2G_k(T_k) \left(1 - \omega^{(k)} \left(\varepsilon_u^{(k)}, T_k \right) \right) \varepsilon_{ij}^{(k)}, \quad \sigma^{(k)} = 3K_k(T_k) (\varepsilon^{(k)} - \alpha_{0k} \Delta T_k), \quad (17)$$

где $G_k(T_k)$, $K_k(T_k)$ – температурно-зависимые модули упругости материалов слоев k -го слоя, Па;

α_{0k} – коэффициент линейного температурного расширения k -го слоя, 1/К;

ΔT_k – приращение температуры в k -м слое, отсчитываемое от некоторого начального значения T_0 , К.

В результате была получена система нелинейных дифференциальных уравнений в перемещениях с учетом температуры для физически нелинейной пластины

$$\begin{aligned} & a_1 u_{1x}^n - a_1 u_{2x}^n - a_4 u_{1x}^n{}_{,xx} - a_5 u_{2x}^n{}_{,xx} - a_{19} u_{1x}^n{}_{,yy} - a_{18} u_{2x}^n{}_{,yy} - a_{21} u_{1y}^n{}_{,xy} - a_{23} u_{2y}^n{}_{,xy} + a_2 w_1^n{}_{,x} + \\ & + a_3 w_2^n{}_{,x} - 2a_{24} w_1^n{}_{,xyy} + a_{25} w_2^n{}_{,xyy} - 2a_6 w_1^n{}_{,xxx} + a_7 w_2^n{}_{,xxx} = p_x + p_\omega^{n-1}, \\ -a_1 u_{1x}^n + a_1 u_{2x}^n - a_5 u_{1x}^n{}_{,xx} - a_9 u_{2x}^n{}_{,xx} - a_{18} u_{1x}^n{}_{,yy} - a_{20} u_{2x}^n{}_{,yy} - a_{23} u_{1y}^n{}_{,xy} - a_{22} u_{2y}^n{}_{,xy} - a_{10} w_1^n{}_{,x} - \\ & - a_{17} w_2^n{}_{,x} - a_{24} w_1^n{}_{,xyy} + 2a_{25} w_2^n{}_{,xyy} - a_6 w_1^n{}_{,xxx} + 2a_7 w_2^n{}_{,xxx} = s_\omega^{n-1}, \\ a_1 u_{1y}^n - a_1 u_{2y}^n - a_4 u_{1y}^n{}_{,yy} - a_5 u_{2y}^n{}_{,yy} - a_{19} u_{1y}^n{}_{,xx} - a_{18} u_{2y}^n{}_{,xx} - a_{21} u_{1x}^n{}_{,xy} - a_{23} u_{2x}^n{}_{,xy} + a_2 w_1^n{}_{,y} + \\ & + a_3 w_2^n{}_{,y} - 2a_{24} w_1^n{}_{,xyy} + a_{25} w_2^n{}_{,xyy} - 2a_6 w_1^n{}_{,yyy} + a_7 w_2^n{}_{,yyy} = p_y + h_\omega^{n-1}, \\ -a_1 u_{1y}^n + a_1 u_{2y}^n - a_5 u_{1y}^n{}_{,yy} - a_9 u_{2y}^n{}_{,yy} - a_{18} u_{1y}^n{}_{,xx} - a_{20} u_{2y}^n{}_{,xx} - a_{23} u_{1x}^n{}_{,xy} - a_{22} u_{2x}^n{}_{,xy} - a_{10} w_1^n{}_{,y} - \\ & - a_{17} w_2^n{}_{,y} - a_{24} w_1^n{}_{,xyy} + 2a_{25} w_2^n{}_{,xyy} - a_6 w_1^n{}_{,yyy} + 2a_7 w_2^n{}_{,yyy} = r_\omega^{n-1}, \\ -a_2 u_{1x}^n{}_{,x} - a_2 u_{1y}^n{}_{,y} + a_{10} u_{2x}^n{}_{,x} + a_{10} u_{2y}^n{}_{,y} + 2a_6 u_{1x}^n{}_{,xxx} + a_6 u_{2x}^n{}_{,xxx} + 2a_6 u_{1y}^n{}_{,yyy} + a_6 u_{2y}^n{}_{,yyy} + \\ & + 2a_{24} u_{1x}^n{}_{,xyy} + a_{24} u_{2x}^n{}_{,xyy} + 2a_{24} u_{1y}^n{}_{,xyy} + a_{24} u_{2y}^n{}_{,xyy} + a_{11} w_1^n{}_{,xx} + a_{11} w_1^n{}_{,yy} - a_{12} w_2^n{}_{,xx} - \\ & - a_{12} w_2^n{}_{,yy} + a_{15} w_1^n{}_{,xxx} + a_{15} w_1^n{}_{,yyy} - a_{16} w_2^n{}_{,xxx} - a_{16} w_2^n{}_{,yyy} + a_{26} w_1^n{}_{,xyy} - a_{28} w_2^n{}_{,xyy} + \\ & + a_8 w_1^n - a_8 w_2^n = q + 0,5 p_{x,x} h_1 + 0,5 p_{y,y} h_1 + q_\omega^{n-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -a_3 u_{1y}^{n-1} - a_3 u_{1x}^{n-1} + a_{17} u_{2y}^{n-1} + a_{17} u_{2x}^{n-1} - a_7 u_{1y}^{n-1} - a_7 u_{1x}^{n-1} - 2a_7 u_{2y}^{n-1} - 2a_7 u_{2x}^{n-1} - \\
& - 2a_{27} u_{2y}^{n-1} - a_{25} u_{1y}^{n-1} - 2a_{25} u_{2x}^{n-1} - a_{25} u_{1x}^{n-1} - a_{12} w_1^{n-1} - a_{12} w_1^{n-1} + a_{14} w_2^{n-1} + \\
& + a_{14} w_2^{n-1} - a_{16} w_1^{n-1} - a_{16} w_1^{n-1} + a_{13} w_2^{n-1} + a_{13} w_2^{n-1} - a_{28} w_1^{n-1} + a_{27} w_2^{n-1} - \\
& - a_8 w_1^{n-1} + a_8 w_2^{n-1} = g_\omega^{n-1}, \quad (18)
\end{aligned}$$

где a_1, \dots, a_{28} – коэффициенты, которые определяются по интегральным формулам, учитывающие температурное изменение параметров упругости материалов по толщине пластины;

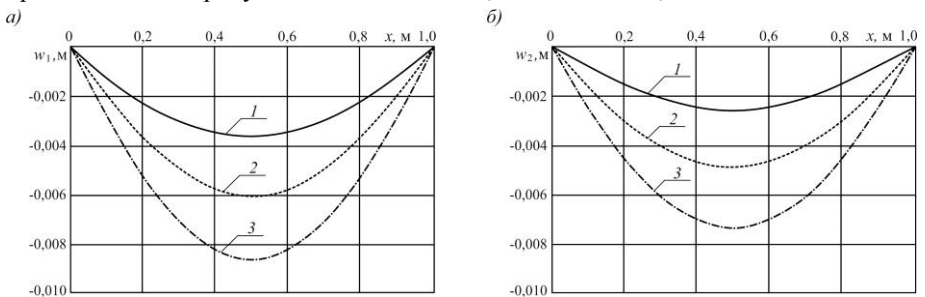
p_ω^{n-1} , s_ω^{n-1} , h_ω^{n-1} , r_ω^{n-1} , q_ω^{n-1} , g_ω^{n-1} – величины, которые учитывают все нелинейные и температурные добавки и вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned}
P_\omega^{n-1} &= H_{1x}^{\omega(n-1)} - V_1^{\omega(n-1)} - P_{1x}^{\omega(n-1)}, \quad S_\omega^{n-1} = H_{1x}^{\omega(n-1)} + V_2^{\omega(n-1)} + P_{2x}^{\omega(n-1)}, \\
h_\omega^{n-1} &= H_{1y}^{\omega(n-1)} - V_1^{\omega(n-1)} - P_{1y}^{\omega(n-1)}, \quad r_\omega^{n-1} = H_{1y}^{\omega(n-1)} + V_2^{\omega(n-1)} + P_{2y}^{\omega(n-1)}, \\
q_\omega^{n-1} &= S_{1x}^{\omega(n-1)} + H_2^{\omega(n-1)} - T_{1x}^{\omega(n-1)} - U_{1y}^{\omega(n-1)} + S_{1y}^{\omega(n-1)} - T_{1y}^{\omega(n-1)}, \\
g_\omega^{n-1} &= S_{2x}^{\omega(n-1)} - H_2^{\omega(n-1)} - T_{2x}^{\omega(n-1)} - U_{2y}^{\omega(n-1)} + S_{2y}^{\omega(n-1)} - T_{2y}^{\omega(n-1)}. \quad (19)
\end{aligned}$$

Решение системы дифференциальных уравнений (18) предполагаем в виде разложения в тригонометрические ряды, которые удовлетворяют граничным условиям. Искомые перемещения выражаются по формулам (14), внешние нагрузки – по формулам (15). Система линейных алгебраических уравнений для нахождения искомых амплитуд перемещений по виду совпадает с системой (16), коэффициенты b_i зависят от температуры.

Численное решение. Принимается, что пакет трехслойной пластины составлен из материалов Д16Т–фторопласт–Д16Т, толщины слоев $h_1 = 0,04$ м, $h_2 = 0,02$ м, $h_3 = 0,4$ м. Нагрузка равномерно распределена по всей поверхности пластины интенсивностью $q = -2$ МПа, размеры пластины $l_x = 1$ м, $l_y = 1$ м. Граничные условия – свободное опирание на жесткие неподвижные опоры.

Рассмотрим влияние температуры на прогибы несущих слоев, которые представлены на рисунке 8: 1 – $T = 293$ К, 2 – $T = 343$ К, 3 – $T = 393$ К.

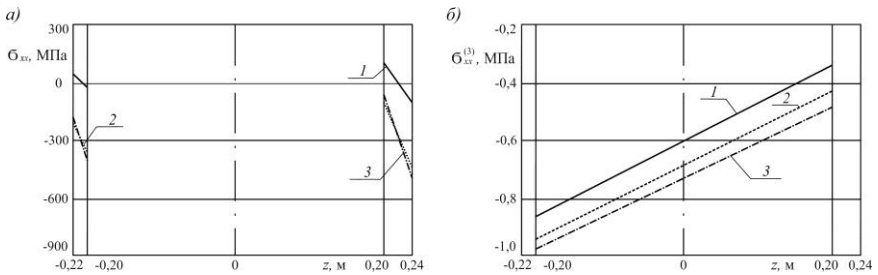


1 – $T = 293$ К, 2 – $T = 343$ К, 3 – $T = 393$ К

Рисунок 8. – Прогибы первого (а) и второго (б) несущих слоев термоупругой пластины

Можно отметить, что температурное воздействие на пластину приводит к увеличению максимальных прогибов обоих несущих слоев. Нагревание пластины на 50 К приводит к увеличению прогиба первого несущего слоя на 37%, второго – на 50%. При увеличении температуры до 100 К прогиб первого несущего слоя возрастает ещё на 30%, второго на – 51%. Это объясняется тепловым объемом деформированием, а также уменьшением модулей упругости материалов.

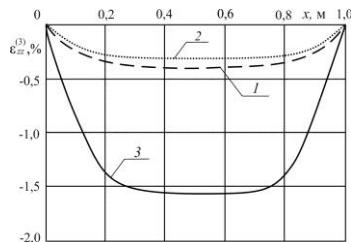
Распределение нормальных напряжений σ_{xx} по срединному поперечному сечению иллюстрирует рисунок 9: 1 – упругая пластина ($T = 293$ К), 2 – термоупругая ($T = 343$ К), 3 – термоупругопластическая ($T = 343$ К). При нагревании пластины на 50 К напряжения увеличиваются до 77,6% в первом несущем слое, во втором – увеличиваются до 91,9%. Воздействие температуры и учет физически нелинейных свойств материалов слоев приводит к увеличению напряжений по модулю в первое несущем слое на 14–21,7%, во втором несущем слое на 3–6% по сравнению с термоупругой пластиной. Как в несущих слоях (рисунок 9 (а)), так и в заполнителе (рисунок 9 (б)) напряжения сдвигаются в отрицательную область.



1 – упругая пластина ($T=293$ К), 2 – термоупругая пластина ($T=343$ К),
3 – термоупругопластическая ($T=343$ К)

Рисунок 9. – Продольные напряжения в несущих слоях (а) и в заполнителе (б) пластины

На рисунке 10 показано изменение относительной поперечной деформации заполнителя ε_{zz} (график в процентах) вдоль оси x при цилиндрическом изгибе. Кривые везде отрицательны, что указывает на обжатие заполнителя, максимум достигается посередине пластины.



1 – упругая пластина, 2 – термоупругая, 3 – термоупругопластическая

Рисунок 10. – Деформации обжатия в заполнителе при цилиндрическом изгибе

Объемная деформация термоупругой пластины уменьшается на 30%, т.к. воздействие температуры способствует увеличению объемной деформации, следовательно, деформация обжатия уменьшается. В случае термоупругопластической пластины происходит рост деформации обжатия на 78% в отличие от упругой, т.к. здесь росту способствуют пластические деформации.

Таким образом, незначительное увеличение температуры (до 50 К) приводит к существенному уточнению значений (до 92%) всех параметров напряженно-деформированного состояния в слоях пластины. В тоже время, учет пластических свойств материала значительно сказывается лишь при расчете перемещений и деформаций (до 64%), значения напряжений в слоях пластины изменяются незначительно (до 12%).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные результаты диссертации

В ходе теоретического исследования деформирования прямоугольной трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем были получены следующие научные результаты:

1. Механико-математические модели физически линейного и нелинейного деформирования трехслойных прямоугольных пластин при действии произвольной распределенной нагрузки, в том числе при действии термосиловых нагрузок, включающие уравнения равновесия в усилиях и перемещениях, формулировки граничных условий [1-А, 10-А, 12-А, 16-А, 20-А];

2. Аналитические решения и численный параметрический анализ напряженно-деформированного состояния *физически линейной* трехслойной прямоугольной пластины со сжимаемым наполнителем при действии равномерно распределенной нагрузки при свободном опирании контура пластины на жесткие неподвижные опоры, показавшие, что при уменьшении толщины второго несущего слоя и увеличением на такую же величину толщины первого несущего слоя прогибы увеличиваются; увеличение толщины наполнителя с 0,08 м до 0,14 м приводит к уменьшению максимального прогиба на 17,8%, а увеличение толщины наполнителя с 0,14 м до 0,2 м приводит к уменьшению максимального прогиба на 14,8%; уменьшение параметров упругости наполнителя или несущих слоев приводит к увеличению напряжений по модулю в обоих несущих слоях; прогиб срединной поверхности наполнителя при учете сжимаемости наполнителя увеличивается порядка 8 % [2-А, 3-А, 11-А, 19-А, 21-А];

3. Аналитические решения и численный параметрический анализ напряженно-деформированного состояния *физически нелинейной* трехслойной прямоугольной пластины со сжимаемым наполнителем, показавшие, что при учете упругопластических свойств материалов слоев в рамках теории малых упругопластических деформаций прогибы увеличиваются до 26%, максимальные напряжения несущих слоев возрастают до 21%, а наполнителя – до 11,5%; при увеличении нагрузки пластические деформации распространяются от контура к центру пластины [4-А, 5-А, 13-А–15-А];

4. Аналитические решения и численный параметрический анализ напряженно-деформированного состояния *термоупругой и термо физически нелинейной* трехслойной прямоугольной пластины, в том числе при цилиндрическом изгибе, показавший, что нагревание пластины на 50 К приводит к увеличению максимальных прогибов обоих несущих слоев; при нагревании максимальные напряжения первого несущего слоя уменьшаются до 77%; воздействие температуры способствуют уменьшению напряжений во втором несущем слое термоупругой пластины до 92%, учет пластических и физически нелинейных свойств материалов слоев приводит к увеличению напряжений в первом несущем слое до 21,7%, во втором несущем слое увеличиваются до 8% по сравнению с соответствующими напряжениями в термоупругой пластине [6-А-9-А, 17-А, 18-А, 22-А].

Рекомендации по практическому использованию результатов

Результаты, представленные в диссертации, позволяют численно моделировать перемещения, деформации и напряжения в трехслойных прямоугольных пластинах при воздействии термосиловых нагрузок, давать реальное представление при проектировании слоистых систем, что способствует снижению материальных затрат на проведение соответствующих экспериментальных исследований.

Часть полученных результатов предполагается использовать в НТЦК ОАО «Гомсельмаш», на основании чего может быть выполнена оценка прочности и жесткости элементов технологического тракта кормоуборочного комбайна с износостойкими покрытиями, а также ножей измельчающего барабана с нанесенным упрочняющим слоем.

Часть полученных результатов может быть использована в расчетной практике предприятия комплексного проектирования «Гомельдорпроект» КИРСУП «Гомельоблдорстрой», на основании чего может быть выполнена оценка прочности и жесткости плит дорожного покрытия, а также даны практические рекомендации по их проектированию.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ

Статьи в рецензируемых журналах и сборниках трудов

1-А. Зеленая, А. С. Деформирование упругой трехслойной прямоугольной пластины со сжимаемым наполнителем / А. С. Зеленая // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. Естественные науки. – 2017. – №6 (105). – С. 89–95.

2-А. Зеленая, А. С. Напряженно-деформированное состояние упругой трехслойной прямоугольной пластины со сжимаемым наполнителем /

А. С. Зеленая // Механика. Исследования и инновации: междунар. сб. науч. тр. / Белорус. гос. ун-т. транспорта. – Гомель, 2017. – Вып. 10. – С. 67–74.

3-А. Зеленая, А. С. Изгиб упругой трехслойной прямоугольной пластины со сжимаемым наполнителем / А. С. Зеленая // Математическое моделирование, компьютерный и натуральный эксперимент в естественных науках. – 2017. – № 3; URL: mathmod.esrae.ru/15-52 (дата обращения: 08.12.2017).

4-А. Леоненко, Д. В. Упругопластический изгиб прямоугольной трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем / Д. В. Леоненко, А. С. Зеленая // Теоретическая и прикладная механика: междунар. научн.-техн. сб. – Минск : БНТУ, 2018. – Вып. 33. – С.65–71.

5-А. Леоненко, Д. В. Напряженно-деформированное состояние физически нелинейной трехслойной прямоугольной пластины со сжимаемым наполнителем / Д. В. Леоненко, А. С. Зеленая // Механика машин, механизмов и материалов. – 2018. – № 2(43). – С. 77–82.

6-А. Зеленая, А. С. Напряженно-деформированное состояние термоупругой трехслойной прямоугольной пластины со сжимаемым наполнителем / А. С. Зеленая // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. Естественные науки. – 2018. – №6 (111). – С. 98–104.

7-А. Зеленая, А. С. Термоупругий изгиб трехслойной прямоугольной пластины со сжимаемым наполнителем / А. С. Зеленая // Механика. Исследования и инновации: междунар. сб. науч. тр. / Белорус. гос. ун-т. транспорта. – Гомель, 2018. – Вып. 11. – С. 93–100.

8-А. Зеленая, А. С. Цилиндрический изгиб упругопластической прямоугольной трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем в температурном поле / А. С. Зеленая // Проблемы физики, математики и техники. – 2019. – №1 (38). – С. 45–49.

9-А. Зеленая А.С. Изгиб упругопластической прямоугольной трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем в температурном поле / А. С. Зеленая // Теоретическая и прикладная механика: междунар. научн.-техн. сб. – Минск : БНТУ, 2019. – Вып. 34. – С.172–178.

Материалы конференций

10-А. Зеленая, А. С. Уравнения равновесия прямоугольной трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем / А. С. Зеленая // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред: материалы XXIII Междунар. симпоз. им. А. Г. Горшкова, Вятчи, 13–17 февр. 2017 г. / МАИ (Национальный исследовательский университет). – Москва : ООО «ТР-принт», 2017. – Т. 2. – С. 33–36.

11-А. Зеленая, А. С. Постановка задачи об изгибе прямоугольной трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем [Электронный ресурс] / А. С. Зеленая, Д. В. Леоненко // Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях: материалы XX Республ. научн. конф. студент. и аспирант., Гомель, 20–22 марта

2017 г. / Гомельский гос. ун-т. им. Франциска Скорины ; редкол.: О. М. Демиденко (гл. ред.) [и др.]. – Гомель, 2017. – Ч. 1. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM).

12-А. Зеленая, А. С. Постановка задачи об изгибе физически нелинейной трехслойной прямоугольной пластины со сжимаемым наполнителем / А. С. Зеленая // Проблемы безопасности на транспорте: материалы VIII Междунар. науч.-практ. конф., посвящ. году науки, Гомель, 23–25 ноября 2017 г. : в 2 ч. / М-во трансп. и коммуникаций Респ. Беларусь, Бел. ж. д., Белорус. гос. ун-т трансп. ; редкол.: Ю. И. Кулаженко (отв. ред.) [и др.]. – Гомель, 2017. – Ч. 2. – С. 186–188.

13-А. Зеленая, А. С. Влияние пластичности и физической нелинейности материалов слоев на напряженное состояние в трехслойной пластине / А. С. Зеленая // Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях: материалы XXI Республ. научн. конф. студент. и аспирант., Гомель, 19–21 марта 2018 г. / Гомельский гос. ун-т. им. Франциска Скорины ; редкол.: О. М. Демиденко [и др.]. – Гомель, 2018. – С. 58-59.

14-А. Зеленая, А. С. Уравнения равновесия в усилиях физически нелинейной трехслойной прямоугольной пластины со сжимаемым наполнителем / А. С. Зеленая // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред: материалы XXIV Междунар. симпоз. им. А. Г. Горшкова, Вятичи, 19–23 марта 2018 г. / МАИ (Национальный исследовательский университет). – Москва : ООО «ТР-принт», 2018. – Т. 1. – С. 110–112.

15-А. Зеленая, А.С. Изгиб упругопластической прямоугольной трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем / А.С. Зеленая // Строительство и восстановление искусственных сооружений: материалы VI Междунар. науч.-практ. конф., Гомель, 17–18 мая 2018 г. : в 2 ч. / М-во трансп. и коммуникаций Респ. Беларусь, Белорус. гос. ун-т трансп. ; редкол.: А. А. Поддубный (отв. ред.) [и др.]. – Гомель, 2018. – Ч.1. – С. 59–64.

16-А. Зеленая, А. С. Постановка задачи об изгибе термоупругой трехслойной прямоугольной пластины со сжимаемым наполнителем / А. С. Зеленая // Актуальные вопросы и перспективы развития транспортного и строительного комплексов : материалы IV Междунар. науч.-практ. конф., Гомель, 11–12 октября 2018 г. : в 2 ч. / М-во трансп. и коммуникаций Респ. Беларусь, Бел. ж. д., Белорус. гос. ун-т трансп. ; редкол. Ю. И. Кулаженко (отв. ред.) [и др.]. – Гомель, 2018. – Ч. 2. – С. 149–151.

17-А. Зеленая, А. С. Термоупругопластический изгиб трехслойной прямоугольной пластины со сжимаемым наполнителем / А. С. Зеленая // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред: материалы XXV Междунар. симпоз. им. А. Г. Горшкова, Вятичи, 18–22 марта 2019 г. / МАИ (Национальный исследовательский университет). – Москва : ООО «ТР-принт», 2019. – Т. 1. – С. 111–113.

18-А. Зеленая, А. С. Влияние температуры на прогибы несущих слоев трехслойной прямоугольной пластины со сжимаемым наполнителем / А. С. Зеленая // Новые математические методы и компьютерные технологии в про-

ектировании, производстве и научных исследованиях: материалы XXII Республиканской научной конференции студентов и аспирантов, Гомель, 25 – 27 марта 2019 г. / Гомельский гос. ун-т; редкол.: С. П. Жогаль [и др.]. – Гомель, 2019. – С. 69 – 70.

19-А. Зеленая, А.С. Учет сжимаемости заполнителя в трехслойной прямоугольной пластине [Электронный ресурс] / А. С. Зеленая // Актуальные вопросы физики и техники: материалы VIII Республиканской научной конференции студентов и аспирантов, Гомель, 25 апреля 2019 г. / Гомельский гос. ун-т. им. Франциска Скорины ; редкол.: Д. Л. Коваленко (гл. ред.) [и др.]. – Гомель, 2019. – Ч. 1. – Режим доступа: onference.gsu.by/sites/default/files/2019-04/Сборник материалов Часть 1.pdf. – Дата доступа: 17.05.2019.

Тезисы докладов

20-А. Зеленая, А. С. Постановка задачи об изгибе прямоугольной трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем / А. С. Зеленая // Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы: тез. докладов V междунар. науч. семинара, Москва, 17–19 октября 2016 г. / МАИ (Национальный исследовательский университет). – Москва, 2016. – С. 79–80.

21-А. Зеленая, А. С. Система дифференциальных уравнений равновесия в перемещениях прямоугольной трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем / А. С. Зеленая // Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы: тез. докладов VI междунар. научн.-практ. семинара, Москва, 8–10 ноября 2017 г. / МАИ (Национальный исследовательский университет). – Москва, 2017. – С. 65–67.

22-А. Зеленая, А. С. Изгиб трехслойной прямоугольной упругой пластины со сжимаемым заполнителем в температурном поле / А. С. Зеленая // Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы: тез. докладов VII междунар. науч. семинара, Москва, 12–13 ноября 2018 г. / МАИ (Национальный исследовательский университет). – Москва, 2018. – С. 65–67.



РЕЗЮМЕ

Зеленая Анастасия Сергеевна

Деформирование прямоугольных физически нелинейных трехслойных пластин со сжимаемым наполнителем в температурном поле

Ключевые слова: трехслойная прямоугольная пластина, сжимаемый наполнитель, изгиб, температура, термопластичность.

Объект исследования: несимметричные по толщине трехслойные прямоугольные пластины со сжимаемым наполнителем с физически нелинейными материалами слоев при различных граничных условиях; *предмет исследования:* напряженно-деформированное состояние упругих и неупругих трехслойных прямоугольных пластин со сжимаемым наполнителем при действии термосиловых нагрузок.

Цель работы: разработка механико-математических моделей деформирования упругих и физически нелинейных трехслойных прямоугольных пластин со сжимаемым наполнителем при действии комплексных термосиловых нагрузок.

Выполнены постановки новых краевых задач о деформировании физически линейной и физически нелинейной трехслойных пластин при действии термосиловых нагрузок. Разработаны механико-математические модели деформирования поставленных задач, включающие уравнения равновесия в усилиях и перемещениях, формулировки граничных условий. Получен ряд аналитических решений рассматриваемых краевых задач термоупругости и термопластичности, содержащие формулы для расчета перемещений, внутренних усилий, деформаций и напряжений в случае различных условий закрепления контура.

Численные исследования напряженно-деформированного состояния физически линейных и нелинейных прямоугольных трехслойных пластин со сжимаемым наполнителем при термосиловых нагружениях установили зависимости перемещений, деформаций и напряжений при различных геометрических и упругих параметрах слоев от внешней нагрузки и температуры. Численные результаты физически нелинейной пластины были получены методом «упругих решений» А. А. Ильюшина.

Новые постановки, методы исследования и полученные решения задач статики упругих и неупругих трехслойных прямоугольных пластин со сжимаемым наполнителем при термосиловых воздействиях вносят существенный вклад в развитие механики неоднородных деформируемых твердых тел.

РЭЗІЮМЭ

Зялёная Анастасія Сяргееўна

Дэфармаванне прамавугольных фізічна нелінейных трохслаёвых пласцін са сціскальным запаўняльнікам у тэмпературным полі

Ключавыя словы: трохслаёвая прамавугольная пласціна, сціскальны запаўняльнік, выгіб, тэмпература, тэрмапластычнасць.

Аб'ект даследавання: несіметрычныя па таўшчыні трохслаёвыя прамавугольныя пласціны са сціскальным запаўняльнікам з фізічна нелінейнымі матэрыяламі слаёў пры розных гранічных умовах; прадмет даследавання: напружана-дэфармаваны стан пругкіх і няпружкіх трохслаёвых прамавугольных пласцін са сціскальным запаўняльнікам пры дзеянні тэрмасілавых нагрузак.

Мэта работы: распрацоўка механіка-матэматычных мадэлей дэфармавання пругкіх і фізічна нелінейных трохслаёвых прамавугольных пласцін са сціскальным запаўняльнікам пры дзеянні комплексных тэрмасілавых нагрузак.

Выкананы пастаноўкі новых краявых задач аб дэфармаванні фізічна лінейнай і фізічна нелінейнай трохслаёвых пласцін пры дзеянні тэрмасілавых нагрузак. Распрацаваны механіка-матэматычныя мадэлі дэфармавання пастаўленых задач, якія ўключаюць ураўненні раўнавагі ў намаганнях і перамяшчэннях, фармулёўкі гранічных умоў. Атрыманы шэраг аналітычных рашэнняў разгледжаных краявых задач тэрмапружасці і тэрмапластычнасці, якія змяшчаюць формулы для разліку перамяшчэнняў, унутраных намаганняў, дэфармацый і напружанняў у выпадку розных умоў замацавання контуру.

Лікавыя даследаванні напружана-дэфармаванага стану фізічна лінейных і нелінейных прамавугольных трохслаёвых пласцін са сціскальным запаўняльнікам пры тэрмасілавых нагружэннях вызначылі залежнасці перамяшчэнняў, дэфармацый і напружанняў пры розных геаметрычных і пругкіх параметрах слаёў ад знешняй нагрукі і тэмпературы. Лікавыя вынікі фізічна нелінейнай пласціны былі атрыманы метадам «пружкіх рашэнняў» А. А. Ільюшына.

Новыя пастаноўкі, метады даследавання і атрыманыя рашэнні задач статыкі пругкіх і няпружкіх трохслаёвых прамавугольных пласцін са сціскальным запаўняльнікам пры тэрмасілавых уздзеяннях уносяць істотны ўклад у развіццё механікі неаднародных дэфармаваных цвёрдых цел.

SUMMARY

Zelenaya Anastasia Sergeevna

Deformation of rectangular physically nonlinear three-layer plates with compressible filler in a temperature field

Keywords: three-layer rectangular plate, compressible filler, bending, temperature, thermoplasticity.

The object of study: three-layer rectangular plates, asymmetrical in thickness, with compressible filler with physically nonlinear materials of layers under different boundary conditions; *the subject of study:* the stress-strain state of elastic and inelastic three-layer rectangular plates with the compressible filler under the action of thermal-force loads.

Objective of the work: to develop mechanical and mathematical models for deforming elastic and physically nonlinear three-layer rectangular plates with the compressible filler under the action of complex thermal-force loads.

New boundary value problems of deforming physically linear and physically nonlinear three-layer plates under the pressure of thermal-force loads are performed. Mechanical and mathematical models of the deformation of the set tasks were developed, including equilibrium equations in the forces and displacements, formulations of the boundary conditions. A number of analytical solutions of the considered boundary problems of thermoelasticity and thermoplasticity were obtained, containing formulas for calculating displacements, internal forces, deformations and stresses in the case of different conditions for fixing the contour.

Numerical studies of the stress-strain state of physically linear and nonlinear rectangular three-layer plates with the compressible filler under thermal-force loads established the dependences of displacements, strains, and stresses at different geometric and elastic parameters of the layers, external load, and temperature. Numerical results of a physically nonlinear plate were obtained by the method of “elastic solutions” A. A. Ilyushin.

New statements, research methods and the obtained solutions of the problems of statics of elastic and inelastic three-layer rectangular plates with compressible aggregate under thermal force influences make a significant contribution to the development of mechanics of inhomogeneous deformable solids.

Научное издание

ЗЕЛЕНАЯ Анастасия Сергеевна

**ДЕФОРМИРОВАНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ
ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ ТРЕХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН
СО СЖИМАЕМЫМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ
В ТЕМПЕРАТУРНОМ ПОЛЕ**

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

по специальности

01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

Подписано в печать 06.09.2019 г. Формат бумаги 60x84^{1/16}.
Бумага офсетная. Гарнитура Times. Печать на ризографе.
Усл. печ. л. 1,39. Тираж 90 экз. Зак. № 3544.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Белорусский государственный университет транспорта
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий

№ 1/361 от 13.06.2014.

№ 2/104 от 01.04.2014.

№ 3/1583 от 14.11.2017.

Ул. Кирова, 34, 246653. Гомель